DOROTA PEKASIEWICZ
KRYSTYNA PRUSKA

Analiza matematyczna
dla ekonomicznych kierunków studiów

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

Wydanie II

Analiza matematyczna
dla ekonomicznych kierunków studiów

40 LAT
WYDAWNICTWA
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

DOROTA PEKASIEWICZ
KRYSTYNA PRUSKA

Analiza matematyczna
dla ekonomicznych kierunków studiów

Wydanie II

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

ŁÓDŹ 2013

Dorota Pekasiewicz, Krystyna Pruska – Katedra Metod Statystycznych
Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny, Uniwersytet Łódzki
90-214 Łódź, ul. Rewolucji 1905 r. nr 41/43

RECENZENT

Grażyna Trzpiot

SKŁAD I ŁAMANIE

Barbara Lebioda

PROJEKT OKŁADKI

Barbara Grzejszczak

Wydane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
Wydanie II. W.06022.13.1.S

ISBN (wersja drukowana) 978-83-7525-968-1
ISBN (ebook) 978-83-7969-326-9

Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
90-131 Łódź, ul. Lindleya 8
www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. (42) 665 58 63, faks (42) 665 58 62

Spis treści

Przedmowa

Niniejszy podręcznik powstał na podstawie wykładów i ćwiczeń z analizy matematycznej i matematyki prowadzonych przez autorki na Wydziale Ekonomiczno-Socjologicznym Uniwersytetu Łódzkiego.

Elementy analizy matematycznej występują w programach studiów wszystkich kierunków ekonomicznych, ale w różnym zakresie i na ogół w ramach przedmiotu matematyka. Na niektórych kierunkach prowadzony jest przedmiot o nazwie analiza matematyczna.

W podręczniku tym podjęto próbę opracowania takiego zakresu analizy matematycznej, aby mogli z niego korzystać studenci z różnych kierunków ekonomicznych i o różnym stopniu zaawansowania wymagań matematycznych. Czytelnik sam powinien dokonać wyboru odpowiednich fragmentów tekstu zgodnie ze swoimi oczekiwaniami.

Zagadnienia wstępne zawierają elementy logiki, teorii mnogości i topologii. Przedstawione są tu także zbiory liczb rzeczywistych i zespolonych oraz relacje.

W kolejnych rozdziałach zaprezentowane są ciągi liczb rzeczywistych i punktów z wielowymiarowych przestrzeni rzeczywistych, rzeczywiste funkcje jednej i wielu zmiennych oraz rachunek różniczkowy w tym zakresie, ciągi funkcji rzeczywistych, szeregi liczb rzeczywistych i funkcji rzeczywistych oraz rachunek całkowy rzeczywistych funkcji jednej i wielu zmiennych. W podręczniku zaprezentowane są również równania różniczkowe zwyczajne i metody ich rozwiązywania oraz elementy równań różnicowych.

Książka zawiera rozważania teoretyczne, przykłady o charakterze matematycznym i ekonomicznym oraz zadania do samodzielnego rozwiązania przez Czytelnika, do których podane są odpowiedzi.

Mamy nadzieję, że podręcznik ten spotka się z zainteresowaniem środowisk akademickich.

Autorki

1. Zagadnienia wstępne

1.1. Elementy logiki

Logika matematyczna jest działem matematyki, którego przedmiotem jest analiza zasad rozumowania oraz pojęć z nim związanych z wykorzystaniem metod i narzędzi matematycznych. Podstawowymi pojęciami są: zdanie, forma zdaniowa, funkcja zdaniowa i kwantyfikatory.

Definicja 1.1.1. Zdaniem nazywamy każde wyrażenie, któremu można przypisać jedną z ocen: prawdę lub fałsz. Prawda i fałsz to wartości logiczne zdania.

Zdania oznaczamy zwykle małymi literami, np. p, q, zaś wartość logiczną zdania – symbolem „1”, gdy jest ono prawdziwe oraz symbolem „0”, gdy jest fałszywe.

Wśród zdań wyróżniamy zdania proste i złożone. Zdania złożone składają się ze zdań prostych połączonych funktorami zdaniotwórczymi (spójnikami zdaniowymi). Do najczęściej stosowanych funktorów zdaniotwórczych należą: negacja ($\sim$), alternatywa ($\vee$), koniunkcja ($\wedge$), implikacja ($\Rightarrow$) i równoważność ($\Leftrightarrow$).

Przykłady 1.1.1. Przykładami zdań są następujące wyrażenia:

- Liczba $\sqrt{3}$ jest niewymierna.
- Romb jest kwadratem.
- Liczba 126 jest podzielna przez sześć i liczba 360 jest podzielna przez sześć.

Pierwsze i drugie wyrażenie to zdania proste, przy czym pierwsze jest prawdziwe, a drugie – fałszywe. Trzecie wyrażenie jest przykładem zdania złożonego, prawdziwego.

Definicja 1.1.2. Zdanie zawsze prawdziwe nazywamy tautologią.

Przykładami tautologii są zdania:

1) $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$ (prawo podwójnego przeczenia),
2) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ (prawo de Morgana),
3) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ (prawo de Morgana),
4) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ (prawo transpozycji),
5) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ (prawo implikacji),
6) $[\sim(p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$,
7) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$.

Istotnym zagadnieniem rachunku zdań jest sprawdzanie, czy dane zdanie jest tautologią. W tym celu rozważa się różne układy wartości logicznych zdań prostych, wchodzących w skład rozpatrywanego zdania i wyznacza się wartość logiczną tego zdania.

Podstawowe zasady określania wartości logicznej zdań złożonych są przedstawione w tabl. 1.1.1.

Tablica 1.1.1. Wartości logiczne negacji, alternatywy, koniunkcji, implikacji i równoważności zdań p i q

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Źródło: opracowanie własne.

Przykłady 1.1.2.

- Zdanie $p \vee \sim p$ jest tautologią. Sprawdzenie wartości logicznej tego zdania związane jest z rozważeniem możliwych wariantów wartości logicznej zdania p, co przedstawione jest w tabl. 1.1.2.

Tablica 1.1.2. Wartości logiczne zdania $p \vee \sim p$

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
0	1	1
1	0	1

Źródło: opracowanie własne.

Zdanie $p \vee \sim p$ jest prawdziwe bez względu na wartość logiczną zdania p, czyli jest tautologią.

- Prawdziwość zdania $[\sim (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$ sprawdzamy analogicznie. Wyniki zaprezentowane są w tabl. 1.1.3.

Tablica 1.1.3. Wartości logiczne zdania $[\sim (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [p \wedge \sim q)]$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$[\sim(p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1

Źródło: opracowanie własne.

Ostatnia kolumna tabl. 1.1.3. świadczy o prawdziwości rozważanego zdania bez względu na wartości logiczne zdań p i q, zatem jest ono tautologią.

Definicja 1.1.3. Wyrażenie, któremu nie można przypisać wartości logicznej, nazywamy formą zdaniową.

Definicja 1.1.4. Funkcją zdaniową określoną na zbiorze X nazywamy wyrażenie zawierające zmienne, które staje się zdaniem, jeśli za zmienne podstawimy konkretne wielkości. Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji zdaniowej.

Funkcja zdaniowa jest formą zdaniową.

Przykłady 1.1.3.

- Wyrażenie $x^2 - 1 = 3$, gdzie $x \in R$, jest funkcją zdaniową, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych R. Dla $x \in \{-2, 2\}$ ma ono wartość logiczną 1, a dla $x \notin \{-2, 2\}$ – wartość logiczną 0.
- Wyrażenie $x^2 - 1 = 3$, gdzie $x \in N$, jest funkcją zdaniową, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych N. Dla $x = 2$ ma ono wartość logiczną 1, a dla $x \in N \setminus \{2\}$ – wartość logiczną 0.

• Wyrażenie $x^2 + y^2 = 0$, gdzie $x, y \in R$ to funkcja zdaniowa określona na zbiorze R. Dla $(x, y) = (0, 0)$ ma ono wartość logiczną 1, natomiast dla $(x, y) \neq (0, 0)$ – wartość logiczną 0.

W zapisie funkcji zdaniowych wykorzystuje się symbole zwane kwantyfikatorami.

Wyróżniamy:

- kwantyfikator ogólny (duży): $\forall$ – „ dla każdego…”,
- kwantyfikator szczegółowy (mały): $\exists$ – „istnieje…”.

Kwantyfikatory umożliwiają skrócenie zapisu funkcji zdaniowych.

Przykłady 1.1.4.

• Funkcję zdaniową „liczba naturalna x jest liczbą parzystą” można zapisać w postaci: $\underset{y \in N}{\exists} \; (x = 2y)$.

• Funkcję zdaniową „liczba rzeczywista x jest liczbą pierwszą” można zapisać w postaci: $\underset{\substack{y, z \in R \\ y \neq x,\, z \neq x}}{\forall} \; (x \neq y \cdot z)$.

Rachunek kwantyfikatorów charakteryzuje się następującymi własnościami:

1) $\sim\left(\underset{x \in X}{\exists} p(x) \right) \Leftrightarrow \underset{x \in X}{\forall} (\sim p(x))$ (prawo de Morgana),

2) $\sim\left(\underset{x \in X}{\forall} p(x) \right) \Leftrightarrow \underset{x \in X}{\exists} (\sim p(x))$ (prawo de Morgana),

3) $\underset{x \in X}{\exists} (p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow \underset{x \in X}{\exists} p(x) \vee \underset{x}{\exists} q(x)$,

4) $\underset{x \in X}{\exists} (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow \underset{x \in X}{\exists} p(x) \wedge \underset{x \in X}{\exists} q(x)$,

5) $\underset{x \in X}{\forall} (p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow \underset{x \in X}{\forall} p(x) \wedge \underset{x \in X}{\forall} q(x)$,

6) $\left(\underset{x \in X}{\forall} p(x) \right) \vee \left(\underset{x \in X}{\forall} q(x) \right) \Rightarrow \underset{x \in X}{\forall} (p(x) \vee q(x))$,

7) $\underset{x \in X}{\forall} (p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow \left(\underset{x \in X}{\forall} p(x) \Rightarrow \underset{x \in X}{\forall} q(x) \right)$,

8) $\underset{x \in X}{\exists} \underset{y \in Y}{\forall} u(x, y) \Rightarrow \underset{y \in Y}{\forall} \underset{x \in X}{\exists} u(x, y)$,

9) $\underset{x \in X}{\forall} \underset{y \in Y}{\forall} u(x, y) \Leftrightarrow \underset{y \in Y}{\forall} \underset{x \in X}{\forall} u(x, y)$,

10) $\underset{x\in X}{\exists}\,\underset{y\in Y}{\exists}\, u(x,y) \Leftrightarrow \underset{y\in Y}{\exists}\,\underset{x\in X}{\exists}\, u(x,y)$,

gdzie p i q są funkcjami zdaniowymi zmiennej x o zakresie zmienności $X \neq \varnothing$ oraz u jest funkcją zdaniową zmiennych x i y o wartościach ze zbioru odpowiednio $X \neq \varnothing$ i $Y \neq \varnothing$.

Kwantyfikatory znajdują zastosowanie w wielu zapisach matematycznych. Korzysta się z nich przy formułowaniu definicji i twierdzeń.

1.2. Elementy teorii mnogości

Teoria mnogości jest działem matematyki zajmującym się badaniem ogólnych własności zbiorów, niezależnie od elementów, z których zbiory te są utworzone.

Zbiór jest pojęciem pierwotnym, niedefiniowanym. Zbiory oznaczamy dużymi literami (np. $A, B, C, \ldots$) lub przedstawiamy, wypisując ich elementy (np. $\{2, 4, 6, 8\}$) albo podając funkcję zdaniową, którą muszą spełniać ich elementy np. $\left(\{x \in R : x^2 - 1 < 0\}\right)$. Elementy należące do zbiorów zwykle oznaczamy małymi literami: a, b, …

Na zbiorach można wykonywać różne operacje matematyczne. Poniżej przedstawione są podstawowe definicje z nimi związane, przy czym zakładamy, że wszystkie rozpatrywane zbiory są podzbiorami pewnego ustalonego zbioru zwanego przestrzenią i oznaczonego symbolem X.

Definicja 1.2.1. Mówimy, że zbiór A zawiera się w zbiorze B, co zapisujemy $A \subset B$, jeśli dla każdego elementu x zachodzi warunek: $x \in A \Rightarrow x \in B$.

Znak „$\subset$” nazywamy znakiem inkluzji (zawierania).

Definicja 1.2.2. Dopełnieniem zbioru A w przestrzeni X nazywamy zbiór $A' = \{x \in X : x \notin A\}$.

Definicja 1.2.3. Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór postaci $A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$, tzn. zbiór elementów należących przynajmniej do jednego ze zbiorów A i B.

Definicja 1.2.4. Iloczynem (mnogościowym) zbiorów A i B nazywamy zbiór postaci $A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$, tzn. zbiór elementów, które należą zarówno do zbioru *A,* jak i do zbioru *B*.

Definicja 1.2.5. Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór postaci $A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}$, tzn. zbiór elementów należących do zbioru A i nienależących do zbioru *B*.

Różnicę zbiorów *A* i *B* możemy zapisywać również jako *A* – *B*.

Definicja 1.2.6. Różnicą symetryczną zbiorów A i B nazywamy zbiór postaci $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Przykłady 1.2.1.

- Niech dane będą zbiory $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ i $B = \{2, 4, 6, 10\}$. Wówczas $A \cap B = \{2, 4, 6\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$, $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 8\}$, $B \setminus A = \{10\}$, $A \div B = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$.
- Niech będą dane zbiory $A = \{x \in R :\ 2x - 1 \le 3\}$ i $B = \{x \in R :\ x^2 - 9 > 0\}$, czyli $A = \{x \in R :\ x \le 2\}$, $B = \{x \in R :\ x < -3 \vee x > 3\}$. Wówczas mamy $A' = \{x \in R :\ x > 2\}$, $B' = \{x \in R :\ -3 \le x \le 3\}$, $A \cup B = R \setminus \{x \in R :\ 2 < x \le 3\}$, $A \cap B = \{x \in R :\ x < -3\}$, $A \div B = \{x \in R :\ -3 \le x \le 2 \vee x > 3\}$, (ponieważ $A \setminus B = \{x \in R :\ -3 \le x \le 2\}$ oraz $B \setminus A = \{x \in R :\ x > 3\}$).

Niech *A*, *B*, *C*, *D* będą zbiorami zawartymi w tej samej przestrzeni X.
Działania na zbiorach charakteryzują się następującymi własnościami:

1) $A \subset A \cup B,\ B \subset A \cup B,$
2) $A \cup B = B \cup A,$
3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$
4) $A \cap B \subset A,\ A \cap B \subset B,$
5) $A \cap B = B \cap A,$
6) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$
7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$
9) $A \setminus B \subset A,$

10) $(A \subset B) \wedge (C \subset D) \Rightarrow (A \setminus D) \subset (B \setminus C)$,

11) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
12) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
$\Big\}$ prawa de Morgana.

Definicja 1.2.7. Sumą uogólnioną zbiorów A_t, $t \in T$, gdzie T jest pewną rodziną (zbiorem) indeksów, nazywamy zbiór postaci $\bigcup_{t \in T} A_t = \left\{ x : \underset{t \in T}{\exists} \ x \in A_t \right\}$.

Definicja 1.2.8. Iloczynem uogólnionym zbiorów A_t, $t \in T$, gdzie T jest pewną rodziną (zbiorem) indeksów, nazywamy zbiór postaci $\bigcap_{t \in T} A_t = \left\{ x : \underset{t \in T}{\forall} \ x \in A_t \right\}$.

Symbolem R będziemy oznaczać zbiór liczb rzeczywistych, a symbolem N – zbiór liczb naturalnych.

Przykłady 1.2.2.

- Niech $A_n = \left\{ x \in R : \ \frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n} \right\}$ dla $n \in N$, czyli

$A_1 = \left\{ x \in R : \ \frac{1}{2} \le x \le 1 \right\}$,

$A_2 = \left\{ x \in R : \ \frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{2} \right\}$,

$A_3 = \left\{ x \in R : \ \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{3} \right\}$,

…………………………..

Sumą uogólnioną zbiorów A_n, gdzie $n \in N$, jest zbiór $\bigcup_{t \in N} A_t = \{ x \in R : 0 < x \le 1 \}$, zaś iloczynem uogólnionym jest zbiór $\bigcap_{t \in N} A_t = \emptyset$.

- Niech $A_t = \left\{ x \in R : \ \frac{1}{t^2+1} \le x \le t^2 + 1 \right\}$ dla $t \in R$ tzn.

$A_0 = \{1\}$,

$A_{-1} = A_1 = \left\{ x \in R : \ \frac{1}{2} \le x \le 2 \right\}$,

$A_{-2} = A_2 = \left\{ x \in R: \ \frac{1}{5} \leq x \leq 5 \right\}$,

………………………….

Sumą uogólnioną zbiorów A_t, gdzie $t \in R$, jest zbiór $\bigcup_{t \in R} A_t = \{x \in R : x > 0\}$, zaś iloczynem uogólnionym jest zbiór $\bigcap_{t \in R} A_t = \{1\}$.

Poza iloczynem mnogościowym zbiorów określony jest iloczyn (produkt) kartezjański zbiorów.

Definicja 1.2.9. Iloczynem kartezjańskim niepustych zbiorów A i B nazywamy zbiór postaci $A \times B = \{(x, y): \ x \in A \ \wedge \ y \in B\}$.

Iloczyn kartezjański nie jest działaniem przemiennym, tzn. $A \times B \neq B \times A$, gdy $A \neq B$.

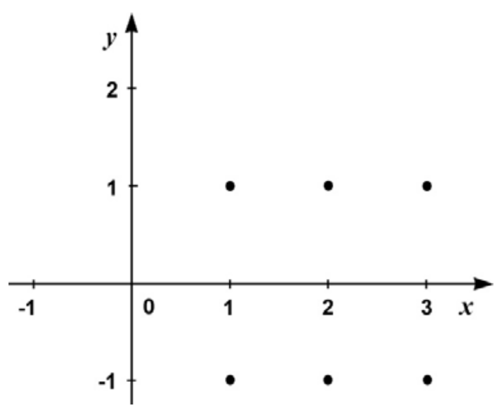
Przykłady 1.2.3.

- Niech $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{-1, 1\}$. Iloczyny kartezjańskie $A \times B$ i $B \times A$ są postaci:

$A \times B = \{(1, -1), (1, 1), (2, -1), (2, 1), (3, -1), (3, 1)\}$,
$B \times A = \{(-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$.

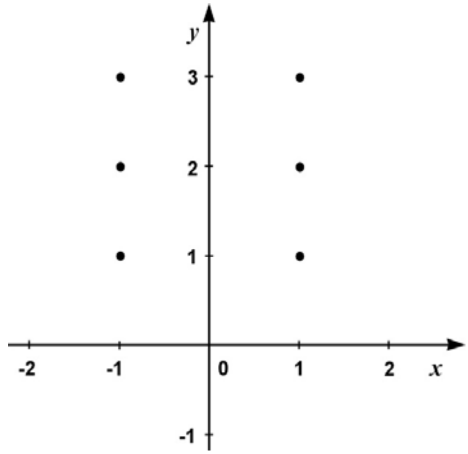
Interpretacja geometryczna tych zbiorów przedstawiona jest na rys. 1.2.1. i 1.2.2.

Rysunek 1.2.1. Interpretacja geometryczna zbioru $\{1, 2, 3\} \times \{-1, 1\}$



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 1.2.2. Interpretacja geometryczna zbioru $\{-1, 1\} \times \{1, 2, 3\}$



Źródło: opracowanie własne.

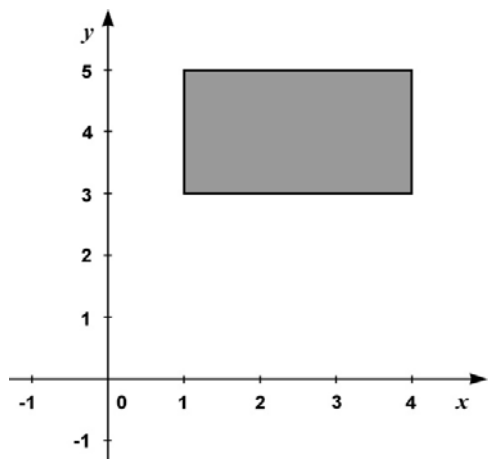
• Niech $A = \{x \in R:\ 1 \le x \le 4\}$ i $B = \{y \in R:\ 3 \le y \le 5\}$. Iloczyny kartezjańskie $A \times B$ i $B \times A$ mają postaci:

$$A \times B = \{(x, y) \in R \times R:\ 1 \le x \le 4 \wedge 3 \le y \le 5\},$$

$$B \times A = \{(x, y) \in R \times R:\ 3 \le x \le 5 \wedge 1 \le y \le 4\}.$$

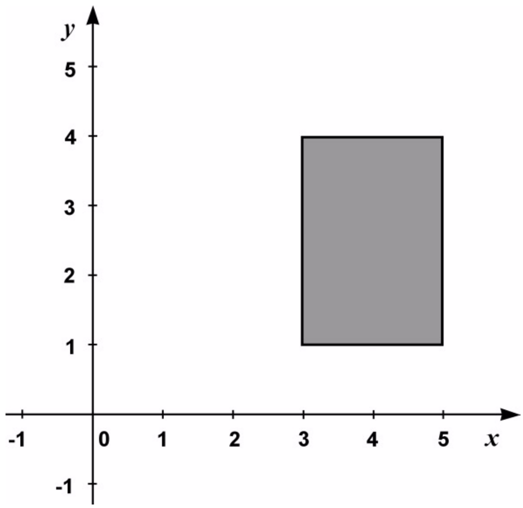
Interpretacje geometryczne zbiorów $A \times B$ i $B \times A$ przedstawione są odpowiednio na rys. 1.2.3 oraz 1.2.4.

Rysunek 1.2.3. Interpretacja geometryczna zbioru
$\{x \in R:\ 1 \le x \le 4\} \times \{y \in R:\ 3 \le y \le 5\}$



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 1.2.4. Interpretacja geometryczna zbioru
$\{x \in R: \ 3 \le x \le 5\} \times \{y \in R: \ 1 \le y \le 4\}$



Źródło: opracowanie własne.

1.3. Relacje

Podzbiór A ustalonej przestrzeni X można utożsamiać z własnością, którą posiada każdy element tego podzbioru i której nie posiada żaden element przestrzeni X nienależący do zbioru A. Wówczas zamiast pisać $x \in A$, gdzie $A \subset X$, piszemy $A(x)$ i mówimy, że „x ma własność A".

Na przykład, jeśli X jest zbiorem liczb całkowitych, a symbol A oznacza zbiór liczb podzielnych przez pięć, to zamiast „$x \in A$" możemy powiedzieć „x jest liczbą podzielną przez pięć".

Własność, jaką posiada każdy element wyróżnionego zbioru, identyfikujemy z tym zbiorem.

Definicja 1.3.1. Relacjami jednoczłonowymi (jednoargumentowymi) w przestrzeni X nazywamy podzbiory tej przestrzeni.

Definicja 1.3.2. Relacjami dwuczłonowymi (dwuargumentowymi) w iloczynie kartezjańskim $X \times Y$, gdzie X i Y są pewnymi przestrzeniami, nazywamy podzbiory tego iloczynu kartezjańskiego.

Niech ρ będzie relacją dwuczłonową w iloczynie kartezjańskim $X \times Y$. Jeżeli $(x, y) \in \rho$, to zapisujemy to w postaci $x\rho y$ i odczytujemy jako „x jest w relacji ρ z y".

Definicja 1.3.3. Parę (x, y), gdzie $x \in A$, $y \in B$, nazywamy parą uporządkowaną, jeśli istotna jest kolejność jej elementów. Pierwszy element (x) nazywamy poprzednikiem, a drugi element (y) nazywamy następnikiem.

Definicja 1.3.4. Zbiór poprzedników par uporządkowanych (x, y) należących do relacji ρ nazywamy dziedziną tej relacji.

Definicja ta oznacza, że dziedziną relacji ρ jest zbiór takich elementów x zbioru X, dla których istnieje $y \in Y$ taki, że $x\rho y$.

Definicja 1.3.5. Przeciwdziedziną relacji $\rho \subset X \times Y$ nazywamy zbiór następników par uporządkowanych należących do ρ.

Oznacza to, że element $y \in Y$ należy do przeciwdziedziny relacji $\rho \subset X \times Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $x \in X$ takie, że $x\rho y$.

Przykłady 1.3.1.

- Relacją dwuczłonową w iloczynie kartezjańskim $N \times N$ jest zbiór $\rho = \{(x, y) \in N \times N : \ y = x^3\}$, tzn. punkt $x \in N$ jest w relacji ρ z punktem x^3.
- Relacją dwuczłonową w iloczynie kartezjańskim $R \times (R^+ \cup \{0\})$, gdzie R^+ to zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, jest zbiór $\rho = \{(x, y) \in R \times R^+ \cup \{0\} : \ y = x^4\}$.

Uogólnienie pojęcia relacji dwuczłonowej prowadzi do definicji relacji wieloczłonowej (wieloargumentowej).

Definicja 1.3.6. Relacjami *k*-członowymi w iloczynie kartezjańskim $X_1 \times ... \times X_k$, gdzie $X_1, ..., X_k$ są dowolnymi niepustymi zbiorami, nazywamy podzbiory tego iloczynu kartezjańskiego.

Definicja 1.3.7. Relacjami *k*-członowymi w X $(k \in N)$, gdzie X jest dowolnym niepustym zbiorem, nazywamy podzbiory iloczynu kartezjańskiego $X_1 \times ... \times X_k$, gdzie $X_1 = ... = X_k = X$.

W przypadku relacji *k*-członowych w iloczynie kartezjańskim $X_1 \times ... \times X_k$ wprowadza się pojęcie *i*-tej dziedziny.

Definicja 1.3.8. Niech $\rho \subset X_1 \times ... \times X_k$. Zbiór tych $x_i \in X_i$, dla których istnieją $x_j \in X_j$, gdzie $j \neq i$, $i, j = 1, ..., k$, takie że $(x_1, ..., x_k) \in \rho$, nazywamy *i*-tą dziedziną relacji ρ.

Relacje mogą charakteryzować się różnymi własnościami. Przedstawione są one w literaturze przedmiotu (np. Kasprowicz A., Romański J. (1984)).

1.4. Liczby rzeczywiste

Wraz z rozwojem matematyki następowało rozszerzenie pojęcia liczby. Początkowo wykorzystywano liczby naturalne, czyli liczby postaci: 1, 2, 3, … Potem wprowadzone zostały liczby wymierne, a następnie niewymierne i zero oraz liczby ujemne. Kolejne rozszerzenie stanowiły liczby zespolone.

Liczby wymierne to ilorazy liczb całkowitych, przy czym dzielnik nie może być zerem.

Definicja 1.4.1. Liczby wymierne to liczby mające rozwinięcie w ułamek dziesiętny skończony lub nieskończony okresowy, a liczby niewymierne – w ułamek dziesiętny nieskończony nieokresowy.

Definicja 1.4.2. Liczba rzeczywista to liczba wymierna albo liczba niewymierna.

Zbiór liczb rzeczywistych (*R*), jest sumą mnogościową zbioru liczb wymiernych (*W*) i zbioru liczb niewymiernych (*NW*).

W zbiorze liczb rzeczywistych *R* określone są dwa działania: dodawanie ($x+y$ dla $x, y \in R$) oraz mnożenie ($x \cdot y$ lub xy dla $x, y \in R$), które posiadają następujące własności:

1) $\forall_{x,y \in R} \; x+y=y+x$ (przemienność dodawania),
2) $\forall_{x,y \in R} \; xy=yx$ (przemienność mnożenia),
3) $\forall_{x,y,z \in R} \; (x+y)+z=x+(y+z)$ (łączność dodawania),
4) $\forall_{x,y,z \in R} \; (xy)z=x(yz)$ (łączność mnożenia),
5) $\forall_{x,y,z \in R} \; x(y+z)=xy+xz$ (rozdzielność mnożenia względem dodawania),
6) istnieje moduł (element neutralny) dodawania i jest nim liczba 0, czyli $\exists_{0 \in R} \forall_{x \in R} \; x+0=x,$
7) istnieje moduł mnożenia (inny niż moduł dodawania) i jest nim liczba 1, czyli $\exists_{1 \in R} \forall_{x \in R} \; x \cdot 1=x,$
8) dla każdych dwóch elementów $x, y \in R$ istnieje element $z \in R,$ zwany ich różnicą $y-x$ taki, że $y=x+z,$ czyli $\forall_{x,y \in R} \exists_{z \in R} \; y=x+z,$
9) dla każdych dwóch elementów $x, y \in R,$ gdzie $x \neq 0,$ istnieje element $w \in R,$ zwany ich ilorazem $y:x$ taki, że $y=x \cdot w,$ czyli $\forall_{\substack{x,y \in R \\ x \neq 0}} \exists_{w \in R} \; y=x \cdot w,$
10) dowolne dwa różne elementy $x, y \in R$ znajdują się w relacji mniejszości, tzn. $x<y$ albo $y<x,$
11) jeżeli zbiór liczb rzeczywistych *R* podzielimy na dwa podzbiory *A* i *B* tak, że każda liczba rzeczywista należy do jednego z tych podzbiorów oraz każda liczba należąca do zbioru *A* jest mniejsza od każdej liczby należącej do zbioru *B*, to wówczas albo w zbiorze *A* znajduje się liczba największa, albo w zbiorze *B* znajduje się liczba najmniejsza (aksjomat ciągłości Dedekinda).

W przypadku dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych można stosować symbole uogólnionej sumy i iloczynu. Są one zdefiniowane następująco:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \ldots a_n,$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$.

Z własności dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych wynika, że dla $a_1, a_2, \ldots, a_n, a, c \in R$ oraz $m, n \in N$ i $1 < m \le n$ zachodzi:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^{n} a_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a = na,$$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

$$\prod_{k=1}^{n} c = c^n,$$

$$\prod_{k=1}^{n} ca_k = c^n \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Definicje sumy i iloczynu uogólnionego możemy stosować na przykład do zapisów: $1 + 2 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k$, $\quad 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) = \prod_{k=1}^{n} (2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k$.

Każdej liczbie rzeczywistej odpowiada wielkość zwana modułem tej liczby.

Definicja 1.4.3. Niech $a \in R$. Moduł liczby a określony jest wzorem:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{gdy } a \ge 0, \\ -a, & \text{gdy } a < 0. \end{cases}$$

Twierdzenie 1.4.1. Moduł liczby rzeczywistej posiada następujące własności:

1) $|a| = |-a|$,

2) $-|a| \le a \le |a|$,

3) $|a + b| \le |a| + |b|$,

4) $|a|-|b| \le \big||a|-|b|\big| \le |a-b| \le |a|+|b|$,

5) $|a|<b \Leftrightarrow -b<a<b$,

6) $|a|>b \Leftrightarrow (a>b \ \vee \ a<-b)$,

7) $|ab|=|a|\cdot|b|$,

gdzie $a,b \in R$.

W odniesieniu do interpretacji geometrycznej liczby rzeczywistej można wykazać, że każdej liczbie rzeczywistej odpowiada dokładnie jeden punkt na osi liczbowej, czyli na prostej, na której obrano dwa punkty: punkt zerowy *O* i punkt jednostkowy *J*. Odległość punktu odpowiadającego liczbie rzeczywistej *a* od punktu *O* na osi jest równa $|a|$, przy czym jednostką odległości jest długość odcinka *OJ*.

W zbiorze liczb rzeczywistych wyróżnia się różne podzbiory. Są to wspomniane już zbiory: liczb naturalnych (*N*), wymiernych (*W*) i niewymiernych (*NW*). Ponadto, występuje zbiór liczb całkowitych (*C*) oraz zbiór liczb rzeczywistych dodatnich (R^+) i zbiór liczb rzeczywistych ujemnych (R^-). Rozpatrywane są także przedziały liczbowe.

Definicja 1.4.4. Niech a i b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a<b$.

a) Przedziałem otwartym (obustronnie) w zbiorze *R* nazywamy zbiór postaci $(a,b)=\{x \in R:\ a<x<b\}$ lub $(-\infty,\infty)=\{x \in R:\ -\infty<x<\infty\}$.

b) Przedziałem domkniętym (obustronnie) w zbiorze *R* nazywamy zbiór postaci $\langle a,b\rangle=\{x \in R:\ a \le x \le b\}$.

c) Przedziałem otwartym lewostronnie (domkniętym prawostronnie) w zbiorze *R* nazywamy zbiór postaci $(a,b\rangle=\{x \in R:\ a<x \le b\}$ lub $(-\infty,b\rangle=\{x \in R:\ -\infty<x \le b\}$.

d) Przedziałem otwartym prawostronnie (domkniętym lewostronnie) w zbiorze *R* nazywamy zbiór postaci $\langle a,b)=\{x \in R:\ a \le x<b\}$ lub $\langle a,\infty)=\{x \in R:\ a \le x<\infty\}$.

Podzbiory liczb rzeczywistych mogą charakteryzować się różnymi własnościami.

Definicja 1.4.5. Zbiór $A \subset R$ jest

a) ograniczony z góry, jeżeli $\underset{M \in R}{\exists} \ \underset{a \in A}{\forall} \ a \leq M$,

b) ograniczony z dołu, jeżeli $\underset{m \in R}{\exists} \ \underset{a \in A}{\forall} \ a \geq m$,

c) ograniczony (z dołu i z góry), jeżeli $\underset{m, M \in R}{\exists} \ \underset{a \in A}{\forall} \ m \leq a \leq M$.

Definicja 1.4.6. Kresem górnym zbioru ograniczonego $A \subset R$ nazywamy najmniejszą z liczb ograniczających ten zbiór z góry i stosujemy oznaczenie sup(A), tzn. supremum (A).

Definicja 1.4.7. Kresem dolnym zbioru ograniczonego $A \subset R$ nazywamy największą z liczb ograniczających ten zbiór z dołu i stosujemy oznaczenie inf(A), tzn. infimum (A).

Przykłady 1.4.1.

- Zbiór liczb naturalnych N jest zbiorem ograniczonym z dołu. Kresem dolnym jest liczba 1.
- Przedział $A = (0, 5\rangle$ jest zbiorem ograniczonym, zatem posiada kresy dolny i górny: inf(A) = 0, sup(A) = 5.

1.5. Liczby zespolone

W zbiorze liczb rzeczywistych R równanie postaci $x^2 = -1$ nie posiada rozwiązania. Zdefiniowanie zbioru, w którym równanie to miałoby rozwiązanie, prowadzi do określenia zbioru liczb zespolonych.

Definicja 1.5.1. Niech Z będzie zbiorem postaci $Z = \{(a,b): \ a \in R, b \in R\}$ i niech $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$, gdzie $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in Z$. Zbiór Z z określonymi następująco działaniami:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1),$$

gdzie $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in Z$, nazywamy zbiorem liczb zespolonych.

Zbiór Z i określone w nim działania posiadają następujące własności dla dowolnych $z_1, z_2, z_3 \in Z$, gdzie $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$, $z_3 = (a_3, b_3)$:

1) $\underset{z_1, z_2 \in Z}{\forall} \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (przemienność dodawania),
2) $\underset{z_1, z_2 \in Z}{\forall} \quad z_1 z_2 = z_2 z_1$ (przemienność mnożenia),
3) $\underset{z_1, z_2, z_3 \in Z}{\forall} \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (łączność dodawania),
4) $\underset{z_1, z_2, z_3 \in Z}{\forall} \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (łączność mnożenia),
5) $\underset{z_1, z_2, z_3 \in Z}{\forall} \quad z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (rozdzielność mnożenia względem dodawania),
6) istnieje element neutralny dodawania i jest nim liczba $\theta = (0, 0)$, czyli $\underset{\theta \in Z}{\exists} \; \underset{z \in Z}{\forall} \; z + \theta = z$,
7) istnieje element neutralny mnożenia i jest nim liczba $\nu = (1, 0)$, czyli $\underset{\nu \in Z}{\exists} \; \underset{z \in Z}{\forall} \; z \cdot \nu = z$,
8) dla każdych dwóch elementów $z_1, z_2 \in Z$ istnieje element $z \in Z$, zwany ich różnicą $z_1 - z_2$ taki, że $z_1 = z_2 + z$,
9) dla każdych dwóch elementów $z_1, z_2 \in Z$, gdzie $z_2 \neq (0, 0)$, istnieje element $z \in Z$, zwany ich ilorazem $z_1 : z_2$ taki, że $z_2 z = z_1$.

W zbiorze liczb zespolonych definiuje się pojęcie liczby przeciwnej i odwrotnej.

Definicja 1.5.2. Liczbą przeciwną do liczby zespolonej $z = (a, b)$ nazywamy liczbę $(-a, -b)$.

Definicja 1.5.3. Liczbą odwrotną do liczby zespolonej $z = (a, b) \neq (0, 0)$ nazywamy liczbę z_0 taką, że $z z_0 = (1, 0)$.

Liczbę odwrotną do liczby zespolonej $z \neq (0, 0)$ wyznacza się, korzystając z powyższej definicji lub następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1.5.1. Liczbą odwrotną do liczby zespolonej $z=(a,\, b)$ i $z \neq (0, 0)$ jest liczba $\left(\frac{a}{a^2+b^2},\, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

D o w ó d: $(a,\, b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2},\, \frac{-ab+ab}{a^2+b^2}\right)=(1,\, 0)$. ■

W zbiorze liczb zespolonych działanie odejmowania i dzielenia wykonujemy jako, odpowiednio, dodawanie liczby przeciwnej i mnożenie przez liczbę odwrotną:

$(a_1,\, b_1)-(a_2,\, b_2)=(a_1,\, b_1)+(-a_2,\, -b_2)$,

$(a_1,\, b_1):(a_2,\, b_2)=(a_1,\, b_1)\cdot\left(\frac{a_2}{a_2^2+b_2^2},\, \frac{-b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)$.

Analogicznie jak w zbiorze liczb rzeczywistych przyjmujemy, że $z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot \ldots \cdot z}_{n}$.

Przykłady 1.5.1.

- $(1,\, -2)\cdot(-1,\, 2)+(3,\, -5)=(-1+4,\;\, 2+2)+(3,\, -5)=(3,\; 4)+(3,\, -5)=$ $=(6,\, -1)$.
- $(1,\, -2):(-1,\, 2)=(1,\, -2)\cdot\left(\frac{-1}{5},\, \frac{-2}{5}\right)=\left(-\frac{1}{5}-\frac{4}{5},\, -\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\right)=(-1,\, 0)$.

Oznaczmy liczbę (0, 1) symbolem i. Liczba ta posiada własność: $i^2=-1$. Zauważmy, że dla $(a,\, b)\in Z$ zachodzi:

$$(a,\, b)=(a,\; 0)+(0,\; b)=(a,\; 0)+(b,\; 0)\cdot(0,\; 1)=(a,\; 0)+(b,\; 0)i.$$

Liczby zespolone postaci $(a,\, 0)$, gdzie $a\in R$, są utożsamiane z liczbami rzeczywistymi. Zamiast $(a,\; 0)$ wygodniej jest czasem pisać a. Wówczas liczbę zespoloną $z=(a,\, b)$ można przedstawić w postaci $z=a+bi$, gdzie $i=(0,\, 1)$.

Definicja 1.5.4. Postacią kanoniczną liczby zespolonej $z=(a,\, b)$ nazywamy wyrażenie: $z=a+bi$. Wielkość a to część rzeczywista, zaś b - część urojona liczby zespolonej z.

Część rzeczywistą i część urojoną liczby zespolonej z oznaczamy, odpowiednio, $\operatorname{re} z$ oraz $\operatorname{im} z$.

Postać kanoniczna liczby zespolonej ułatwia przeprowadzanie działań. Wykonujemy je tak, jak w zbiorze wielomianów. Przypadek mnożenia liczb zespolonych przedstawiony jest poniżej:

$$(a_1, b_1)\cdot(a_2, b_2) = (a_1 + ib_1)\cdot(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 =$$
$$= a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 - b_1 b_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) =$$
$$= \left(a_1 a_2 - b_1 b_2,\ a_1 b_2 + a_2 b_1\right).$$

Twierdzenie 1.5.2. W zbiorze liczb zespolonych równanie $z^2 = -1$ ma dwa rozwiązania $z_1 = i,\ z_2 = -i.$

Liczbę zespoloną $z = (a,\ b)$ interpretujemy graficznie jako punkt $(a,\ b)$ w kartezjańskim układzie współrzędnych, w którym oś OX nazywana jest osią rzeczywistą, zaś OY osią urojoną.

Definicja 1.5.5. Wartością bezwzględną (modułem) liczby zespolonej $z = a + bi$ nazywamy wielkość $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Wartość bezwzględną liczby zespolonej $z = (a,\ b)$ interpretuje się jako odległość punktu $(a,\ b)$ od początku układu współrzędnych.

Definicja 1.5.6. Liczbą sprzężoną do liczby zespolonej $z = a + bi$ nazywamy liczbę postaci $\bar{z} = a - bi.$

Związek między wartością bezwzględną a sprzężeniem liczby zespolonej z określa poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1.5.3. Dla dowolnej liczby zespolonej z prawdziwa jest równość: $z\cdot\bar{z} = |z|^2$.

D o w ó d. Dla dowolnej liczby zespolonej $z = a + bi$ zachodzi:
$z\cdot\bar{z} = (a + bi)\cdot(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$. ■

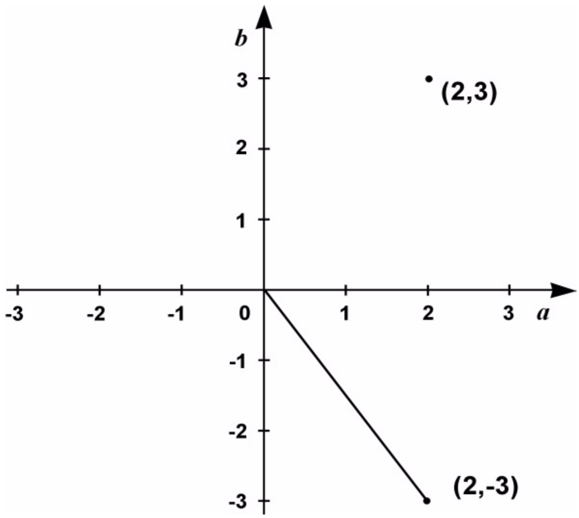
Twierdzenie to możemy wykorzystać przy dzieleniu liczby zespolonych:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Przykłady 1.5.2.

- Na rys. 1.5.1. w kartezjańskim układzie współrzędnych przedstawiona jest liczba $z = (2, -3)$, liczba do niej sprzężona $\bar{z} = (2, 3)$ i moduł $|z| = \sqrt{13}$, czyli długość odcinka łączącego punkty (0, 0) i (2, –3).

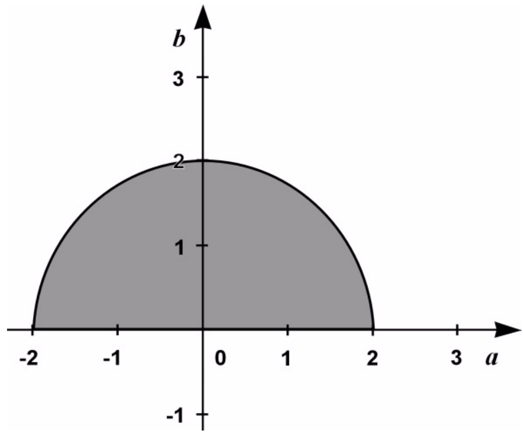
Rysunek 1.5.1. Graficzna prezentacja liczby zespolonej $z = (2, -3)$ oraz $\bar{z}$ i $|z|$



Źródło: opracowanie własne.

- Zbiór liczb zespolonych $\{z \in Z: \ \operatorname{im} z \geq 0 \wedge |z| \leq 2\}$ można przedstawić graficznie w kartezjańskim układzie współrzędnych. Rozwiązując układ nierówności: $\begin{cases} b \geq 0 \\ \sqrt{a^2 + b^2} \leq 2 \end{cases}$, gdzie *a, b* oznaczają odpowiednio część rzeczywistą i część urojoną liczby zespolonej *z* otrzymujemy następującą postać zbioru: $\{z \in Z: \ z = (a,b) \in R^2 \ \wedge \ b \geq 0 \ \wedge \ a^2 + b^2 \leq 4\}$. Graficzna ilustracja tego zbioru przedstawiona jest na rys. 1.5.2.

Rysunek 1.5.2. Graficzna prezentacja zbioru $\{ z \in Z : \ \mathrm{im} z \geq 0 \wedge |z| \leq 2 \}$.



Źródło: opracowanie własne.

Kolejne własności liczb zespolonych przedstawione są poniżej.

Twierdzenie 1.5.4. Jeżeli z_1, z_2 są dowolnymi liczbami zespolonymi to:

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,

b) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$,

c) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,

d) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, gdy $z_2 \neq 0$,

e) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

f) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, gdy $z_2 \neq 0$,

g) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,

h) $\big| |z_1| - |z_2| \big| \leq |z_1 - z_2|$.

D o w ó d. Przeprowadzony zostanie dowód własności a) i f).

Niech $z_1 = a_1 + b_1 i$ oraz $z_2 = a_2 + b_2 i$, gdzie $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$.

Zauważmy, że

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i,$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)\,i =$$
$$= (a_1 - b_1)\,i + (a_2 - b_2 i) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

oraz

$$\frac{z_1}{z_2} = (a_1 + b_1 i)\cdot\left(\frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{b_2}{a_2^2 + b_2^2}\,i\right) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\,i,$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\,i\right| = \sqrt{\frac{(a_1a_2 + b_1b_2)^2}{(a_2^2 + b_2^2)^2} + \frac{(a_2b_1 - a_1b_2)^2}{(a_2^2 + b_2^2)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a_1^2a_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_1^2b_2^2}{(a_2^2 + b_2^2)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a_1^2(a_2^2 + b_2^2) + b_1^2(b_2^2 + a_2^2)}{(a_2^2 + b_2^2)^2}} = \sqrt{\frac{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}{(a_2^2 + b_2^2)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Dowody pozostałych punktów przeprowadza się analogicznie. ■

Twierdzenie 1.5.5. Dla dowolnej liczby zespolonej z prawdziwe są nierówności:

$$\mathrm{re}\, z \le |z|, \quad \mathrm{im}\, z \le |z| \quad \text{oraz} \quad |z| \le |\mathrm{re}\, z| + |\mathrm{im}\, z|.$$

Liczbę zespoloną $z = a + bi \ne 0$ można przedstawić w postaci:

$$z = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}\,i\right) = |z|\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,i\right).$$

Ponieważ $\left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right]^2 + \left[\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right]^2 = 1$, więc istnieje kąt φ, spełniający warunki: $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ i $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Zatem, każdą liczbę zespoloną można zapisać w postaci $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Definicja 1.5.7. Postacią trygonometryczną liczby $z = a + bi \neq 0$ nazywamy wyrażenie: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Kąt φ nosi nazwę argumentu liczby zespolonej z i oznaczany jest przez arg$z$. Jeśli $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, to argument ten nazywamy argumentem głównym i oznaczamy Arg$z$.

Liczbę $z = (0,\ 0)$ także można przedstawić w postaci trygonometrycznej. Jej argumentem może być dowolny kąt φ.

Twierdzenie 1.5.6. Dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2 zachodzi:

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

oraz

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2, \text{ gdy } |z_2| \neq 0.$$

D o w ó d. a) Niech $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Oznacza to, że $\arg z_1 = \varphi_1$ oraz $\arg z_2 = \varphi_2$. Wyznaczmy iloczyn liczb z_1 i z_2, wykorzystując ich postać trygonometryczną:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= |z_1 z_2|(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$

$$= |z_1 z_2|\,((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) =$$

$$= |z_1 z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Wynika stąd, że $\arg(z_1 \cdot z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2$.

Analogicznie przeprowadzamy dowód dla argumentu ilorazu liczb zespolonych. ■

Twierdzenie 1.5.7. Dla dowolnej liczby zespolonej z i $n \in N$ prawdziwy jest wzór: $\arg(z^n) = n\arg z$.

Twierdzenie to wynika z twierdzenia 1.5.6.

Twierdzenie 1.5.8. (Wzór de Moivre'a). Jeżeli z jest liczbą zespoloną postaci $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, to $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

Wzór de Moivre'a ułatwia potęgowanie liczb zespolonych.

Przykłady 1.5.3.

- $(3+2i)(2-3i)=6-9i+4i-6i^2=6-5i+6=12-5i.$
- $(2+4i)\overline{(3-2i)}=(2+4i)(3+2i)=6+4i+12i+8i^2=6+16i-8=-2+16i.$
- W celu obliczenia $(1+i)^{20}$ liczbę $1+i$ przedstawiamy w postaci trygonometrycznej i korzystamy z wzoru de Moivre'a:

$$(1+i)^{20}=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{20}=2^{10}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{20}=$$

$$=2^{10}\left(\cos\frac{20\pi}{4}+i\sin\frac{20\pi}{4}\right)=2^{10}\left(\cos 5\pi+i\sin 5\pi\right)=2^{10}\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=-2^{10}.$$

Definicja 1.5.8. Pierwiastkiem n-tego stopnia, gdzie $n\in N$, z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w o tej własności, że $w^n=z$.

Twierdzenie 1.5.9. Jeżeli $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ oraz $|z|\neq 0$, to istnieje dokładnie n różnych pierwiastków n-tego stopnia z liczby z. Pierwiastki te wyrażają się wzorem:

$$w_k=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\quad \text{dla } k=0, 1, 2,\ldots, n-1.$$

Przykłady 1.5.4.

- W zbiorze liczb zespolonych równanie $x^2+4=0$ ma dwa rozwiązania, gdyż istnieją dwa pierwiastki kwadratowe z liczby $z=-4=4i^2$. Są to $w_0=2i$, $w_1=-2i$.
- Obliczenie pierwiastków drugiego stopnia (kwadratowych) z liczby $z=1+\sqrt{3}i$ związane jest z wyznaczeniem postaci trygonometrycznej tej liczby: $|z|=\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$, $\cos\varphi=\frac{1}{2}$, $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Wynika stąd, że jej argumentem jest $\varphi=\frac{\pi}{3}$, a liczba z ma postać: $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Pierwiastki tej liczby mają postaci:

$$w_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi/3}{2} + i\sin\frac{\pi/3}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi/3 + 2\pi}{2} + i\sin\frac{\pi/3 + 2\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

1.6. Przestrzenie metryczne

Pomiar odległości między dwoma punktami to zawsze aktualny problem. W zależności od cech charakteryzujących przestrzeń obiektów (punktów) wykorzystywane są różne miary. Poniżej sformułowana jest definicja podająca warunki, które każda z nich spełnia.

Definicja 1.6.1. Niech X będzie niepustym zbiorem. Jeżeli każdej parze elementów $x, y \in X$ przyporządkujemy dokładnie jedną nieujemną liczbę rzeczywistą $d(x, y)$ spełniającą warunki:

1) $\forall_{x,y \in X} \; d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (aksjomat tożsamości),
2) $\forall_{x,y \in X} \; d(x, y) = d(y, x)$ (aksjomat symetrii),
3) $\forall_{x,y \in X} \; d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$ (aksjomat trójkąta),

to funkcję d nazywamy metryką, wartość $d(x, y)$ – odległością elementów x i y, a parę (X, d) przestrzenią metryczną.

Przestrzenią metryczną nazywany bywa też zbiór X, dla którego spełnione są warunki podane w definicji 1.6.1.

Wiele funkcji spełnia aksjomaty metryki. Pozwala to zdefiniować różne przestrzenie metryczne.

Wykażemy, że funkcja postaci:

$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$, gdzie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$

($R^n = \underbrace{R \times R \times ... \times R}_{n}$) spełnia aksjomaty metryki, a więc jest metryką.

Aksjomat tożsamości jest spełniony, ponieważ dla dowolnych punktów $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$ zachodzi:

$$(\mathbf{x} = \mathbf{y}) \Leftrightarrow \big((x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n)\big) \Leftrightarrow \left(\underset{1 \le i \le n}{\forall} \; x_i = y_i \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = 0 \right) \Leftrightarrow \big(d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0\big).$$

Aksjomat symetrii jest spełniony, ponieważ dla dowolnych punktów $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$ zachodzi:

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2} = d(\mathbf{y},\mathbf{x}).$$

Przy wykazaniu, że aksjomat trójkąta jest spełniony, korzystamy z nierówności:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \right) \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \right), \text{ gdzie } a_i, b_i \in R \text{ dla } i = 1,\ldots,n.$$

Zauważmy, że dla dowolnych punktów $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$ i $\mathbf{z} = (z_1, z_2, ..., z_n) \in R^n$ zachodzi:

$$\big(d(\mathbf{x},\mathbf{y})\big)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i + z_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 +$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 +$$

$$+2\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} \right) \cdot \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2} \right) + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2} \right)^2 \le \big(d(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d(\mathbf{z},\mathbf{y})\big)^2.$$

Wynika stąd, że aksjomat trójkąta jest spełniony.

Wszystkie trzy aksjomaty są spełnione, czyli funkcja $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$, gdzie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$, jest metryką, a (R^n, d) jest przestrzenią metryczną.

Definicja 1.6.2. Przestrzeń metryczną (R^n, d), gdzie

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

oraz $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$, nazywamy n-wymiarową przestrzenią euklidesową lub arytmetyczną, a funkcję d metryką euklidesową.

Kolejno przedstawimy inne przestrzenie metryczne.

Definicja 1.6.3. Przestrzenią z metryką dyskretną nazywamy parę (X, d), gdzie

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad \mathbf{x} = \mathbf{y} \\ c, & \text{gdy} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \end{cases}$$

oraz $c > 0$ i $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

Szczególnym przypadkiem przestrzeni z metryką dyskretną jest przestrzeń z metryką zero-jedynkową, czyli metryką postaci:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad \mathbf{x} = \mathbf{y}, \\ 1, & \text{gdy} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \end{cases}$$

gdzie $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

Definicja 1.6.4. Przestrzeń (R^n, d), gdzie

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

oraz $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$, nazywamy przestrzenią z metryką „miejską” („taksówkową”).

Definicja 1.6.5. Przestrzeń (R^2, d), gdzie

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} |x_1 - y_1| + |x_2| + |y_2| & \text{dla} \quad x_1 \neq y_1 \\ |x_2 - y_2| & \text{dla} \quad x_1 = y_1 \end{cases}$$

oraz $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in R^2$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in R^2$, nazywamy przestrzenią z metryką „kolejową".

Definicja 1.6.6. Niech przestrzeń (R^2, d) będzie przestrzenią metryczną. Przestrzeń (R^2, d^*), gdzie

$$d^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad \mathbf{x} = \mathbf{y} \\ d(\mathbf{x}, \boldsymbol{L}) + d(\mathbf{y}, \boldsymbol{L}), & \text{gdy} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \end{cases}$$

oraz $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{L} \in R^2$ nazywamy przestrzenią metryczną z „mostem" (samolotową). Punkt $\boldsymbol{L}$ nazywamy mostem (lotniskiem).

Przykłady 1.6.1.

- W przestrzeni (R^2, d), gdzie d jest metryką euklidesową, odległość punktów $\mathbf{x} = (1, 1)$ i $\mathbf{y} = (3, 6)$ wynosi $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{29}$.
- W przestrzeni (R^2, d), gdzie d jest metryką „taksówkową", odległość punktów $\mathbf{x} = (1, 1)$ i $\mathbf{y} = (3, 6)$ wynosi $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 7$.
- W przestrzeni (R^2, d), gdzie d jest metryką „kolejową", odległość punktów $\mathbf{x} = (1, 1)$ i $\mathbf{y} = (3, 6)$ wynosi $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 9$.

Jeżeli wiemy, że funkcja d jest metryką w przestrzeni X, to za pomocą odpowiednich przekształceń tej funkcji możemy otrzymać kolejną metrykę, a więc i przestrzeń metryczną.

Twierdzenie 1.6.1. Jeżeli (X, d) jest przestrzenią metryczną, to przestrzenią metryczną jest (X, d^*), gdzie $d^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a \cdot d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $a > 0$ i $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

D o w ó d. Zauważmy, że w przypadku funkcji d^* dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ zachodzi:

1) $\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow a \cdot d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow d^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$,

2) $d^*(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = a \cdot d(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = a \cdot d(\mathbf{y},\ \mathbf{x}) = d^*(\mathbf{y},\ \mathbf{x})$,

3) $d^*(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = a \cdot d(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) \leq a[d(\mathbf{x},\ \mathbf{z}) + d(\mathbf{z},\ \mathbf{y})] = d^*(\mathbf{x},\ \mathbf{z}) + d^*(\mathbf{z},\ \mathbf{y})$.

Funkcja d^* jest nieujemna i spełnia w zbiorze X wszystkie trzy aksjomaty metryki, zatem twierdzenie jest prawdziwe. ■

Twierdzenie 1.6.2. Jeżeli $(X,\ d)$ jest przestrzenią metryczną, to przestrzenią metryczną jest $(X,\ d^*)$, gdzie $d^*(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \min\{1, d((\mathbf{x},\ \mathbf{y}))\}$ i $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in X$.

Twierdzenie 1.6.3. Jeżeli $(X,\ d_1)$ i $(Y,\ d_2)$ są przestrzeniami metrycznymi, to przestrzenią metryczną jest $(X \times Y, d)$, gdzie $d((\mathbf{x}_1,\ \mathbf{y}_1),(\mathbf{x}_2,\ \mathbf{y}_2)) = \sqrt{d_1^2(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2) + d_2^2(\mathbf{y}_1,\ \mathbf{y}_2)}$ oraz $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2 \in X,\ \ \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in Y$.

1.7. Własności zbiorów w euklidesowych przestrzeniach metrycznych

Zgodnie z definicją 1.6.2. można rozpatrywać jednowymiarowe i wielowymiarowe przestrzenie euklidesowe. Metryka w przestrzeniach euklidesowych jedno-, dwu- i trójwymiarowych wyznacza odległość dwóch punktów jako długość odcinka łączącego te punkty i jest bardzo często wykorzystywana w praktyce. Obecnie przedstawione zostaną pewne podzbiory n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej i ich własności (n =1, 2, 3, …), przy czym symbol d będzie oznaczał metrykę euklidesową.

Definicja 1.7.1. Kulą (otwartą) o środku w punkcie $\mathbf{x}_0 \in R^n$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór postaci $K(\mathbf{x}_0,\ r) = \{\mathbf{x} \in R^n :\ \ d(\mathbf{x},\ \mathbf{x}_0) < r\}$.

Jeżeli rozpatrujemy przestrzeń R, to kulą o środku w punkcie $x_0 \in R$ i promieniu $r > 0$ jest przedział $(x_0 - r,\ x_0 + r)$.

Dalsza część książki dostępna w wersji pełnej.