EGZAMIN GIMNAZJALNY

Matematyka

Powtórzę Zrozumiem Rozwiążę

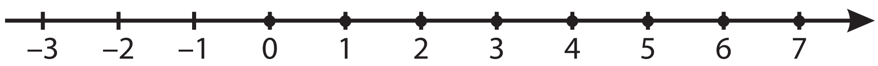
I LICZBY RZECZYWISTE

ZBIORY LICZBOWE

✷ Liczby naturalne

N – zbiór liczb naturalnych.

N = { 0 , 1 , 2 , 3 , ... , 101 , 102 , 103 , ... }.



✷ Liczby całkowite

C – zbiór liczb całkowitych.

$$C = \{ \underbrace{\ldots , -3 , -2 , -1}_{C_-} , 0 , \underbrace{1 , 2 , 3 , 4 , \ldots}_{C_+} \}.$$

✷ Liczby wymierne

W – zbiór liczb wymiernych.

Każdą liczbę, którą można przedstawić w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych, nazywamy liczbą wymierną.

$$p \in W \ , \quad \text{gdy} \quad p = \frac{a}{b} \ , \quad \text{gdzie} \quad a,b \in C \quad \text{i} \quad b \neq 0 \ .$$

$$W = \left\{ -10 \ ; \ -\sqrt{16} \ ; \ -\tfrac{2}{1} \ ; \ -1{,}75 \ ; \ 0 \ ; \ \tfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} \ ; \ \tfrac{21}{7} \ ; \ 3\tfrac{1}{6} \ ; \ \tfrac{4\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7}} \ ; \ 8 \ ; \ \tfrac{25}{2} \ ; \ \ldots \right\}.$$

Liczby wymierne mają rozwinięcie dziesiętne skończone (nazywamy je wówczas liczbami dziesiętnymi) lub nieskończone okresowe.

<u>Przykład:</u> $\frac{2}{5} = 0{,}4;$ $\frac{1}{3} = 0{,}(3);$

$\frac{3}{4} = 0{,}75;$ $\frac{5}{11} = 0{,}(45).$

✷ Liczby niewymierne

NW – zbiór liczb niewymiernych.

Każdą liczbę, która ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone i nieokresowe, nazywamy liczbą niewymierną.

$$NW = \left\{ -10\sqrt[3]{4}\ ;\ -\sqrt{2}\ ;\ 2\sqrt[3]{5}\ ;\ \pi\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ 6\sqrt[3]{7}\ ;\ ... \right\}.$$

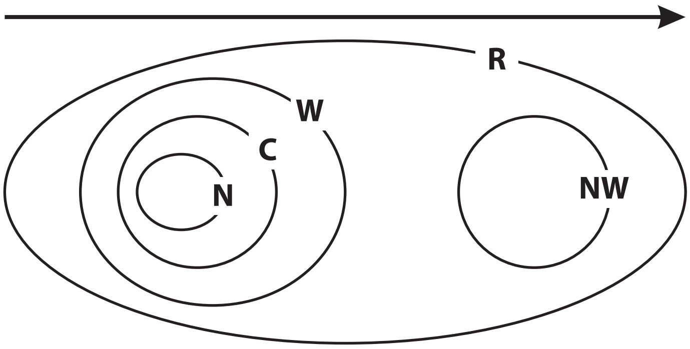
<u>Przykład:</u> $\sqrt{2} = 1{,}4142135562...$; $\sqrt{3} = 1{,}732050808...$; $\pi = 3{,}141592654...$

✷ Liczby rzeczywiste

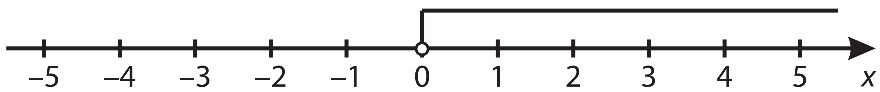
R – zbiór liczb rzeczywistych.

Zbiór liczb rzeczywistych jest sumą zbioru liczb wymiernych i zbioru liczb niewymiernych.

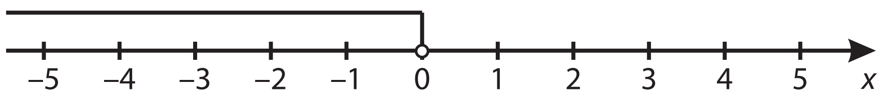
R = W + NW



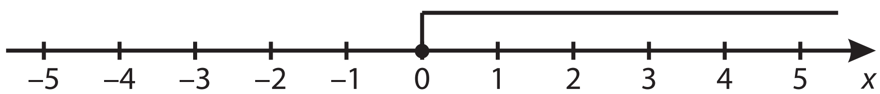
Liczby dodatnie są to wszystkie liczby większe od zera (x > 0).



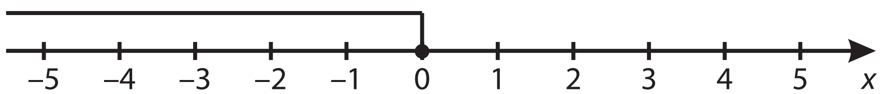
Liczby ujemne są to wszystkie liczby mniejsze od zera (x < 0).



Liczby nieujemne są to wszystkie liczby większe lub równe zero (x ≥ 0).



Liczby niedodatnie są to wszystkie liczby mniejsze lub równe zero (x ≤ 0).



Liczby przeciwne są to takie dwie liczby, których suma wynosi zero. Do każdej liczby istnieje liczba przeciwna.

Przykład: $\frac{1}{3}$ oraz $-\frac{1}{3}$; $-2{,}65$ oraz $2{,}65$; $4\sqrt{2}$ oraz $-4\sqrt{2}$.

Liczby odwrotne są to takie dwie liczby, których iloczyn wynosi jeden. Do liczby zero nie istnieje liczba odwrotna.

Przykład: $-5=-\frac{5}{1}$ oraz $-\frac{1}{5}$; $1\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$ oraz $\frac{3}{5}$; $0{,}45=\frac{45}{100}=\frac{9}{20}$ oraz $\frac{20}{9}=2\frac{2}{9}$.

Liczby pierwsze są to liczby, które dzielą się tylko przez jeden i samą siebie.

Przykład: 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , 23 , ...

Liczby złożone są to liczby, które mają więcej niż dwa dzielniki.

Przykład: 4 , 6 , 8 , 9 , 10 , 12 , 14 , 15 , 16 , 18 , 20 , 21 , ...

Liczby 0 oraz 1 nie podlegają temu podziałowi.

✷ Średnia arytmetyczna liczb

Średnia arytmetyczna liczb jest to iloraz sumy tych liczb przez ich ilość.

$$Śr_A=\frac{suma\ liczb}{ilość\ liczb}\ .$$

Przykład: Obliczmy średnią arytmetyczną liczb: 15, –4, 33, –18, 9.

$$Śr_A=\frac{15+(-4)+33+(-18)+9}{5}=\frac{35}{5}=7\ .$$

Odpowiedź: Średnia arytmetyczna wymienionych liczb jest równa 7.

✷ Wartość bezwzględna liczby

Wartość bezwzględna liczby jest to odległość danej liczby od zera na osi liczbowej.

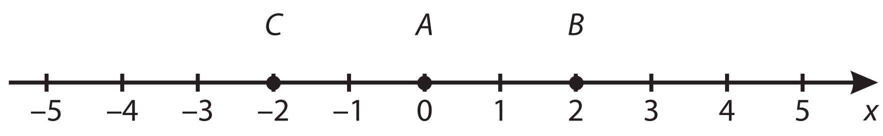
Przykład: $|-3|=3$; $|5|=5$; $|-1{,}7|=1{,}7$; $|0|=0$; $|4\frac{1}{2}|=4\frac{1}{2}$; $|\sqrt{2}|=\sqrt{2}$.

Wartość bezwzględna jest liczbą nieujemną:

$$|x|\geq 0.$$

Wartości bezwzględne liczb przeciwnych są równe:

$$|x|=|-x|.$$



$|AB|=2$, czyli $|2|=2$ oraz $|AC|=2$, czyli $|-2|=2$.

OBLICZENIA PROCENTOWE

✷ Procenty

Procenty są to części setne jakiejś wielkości (ułamki o mianowniku równym 100).

$$\begin{tikzcd} 0{,}05 \arrow[r, bend left, "\cdot 100\%"] & 5\% \arrow[l, bend left, ":100\%"] \end{tikzcd}$$

<u>Przykład:</u>

$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot 100\% = 75\%;$

$\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot 100\ \% = \frac{50}{3}\ \% = 16\frac{2}{3}\ \%;$

$0{,}07 = 0{,}07 \cdot 100\ \% = 7\ \%;$

$2{,}3 = 2{,}3 \cdot 100\ \% = 230\ \%;$

$15\% = 15\% : 100\% = \frac{15}{100} = \frac{3}{20};$

$360\ \% = 360\ \% : 100\ \% = \frac{360}{100} = 3{,}6;$

$\frac{2}{3}\ \% = \frac{2}{3}\ \% : 100\ \% = \frac{2}{3} : 100 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{150};$

$1\frac{1}{9}\ \% = \frac{10}{9}\ \% : 100\ \% = \frac{10}{9} : 100 = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{90}.$

✷ Obliczanie procentu danej liczby

<u>Przykład:</u> Oblicz 5 % liczby 20.

<u>I sposób:</u>

$20 - 100\%,$

$x - 5\%.$

$$x = \frac{20 \cdot 5\%}{100\%} = 1.$$

<u>II sposób:</u>

$x = 5\% \cdot 20$

$x = 0{,}05 \cdot 20$

$x = 1.$

Odpowiedź: 5 % liczby 20 wynosi 1.

✷ Obliczanie liczby na podstawie wartości jej procentu

<u>Przykład:</u> Znajdź liczbę, której 5 % wynosi 30.

<u>I sposób:</u>

$5\% - 30,$

$100\% - x.$

$$x = \frac{100\% \cdot 30}{5\%} = 600.$$

<u>II sposób:</u>

$5\% \cdot x = 30$

$0{,}05 \cdot x = 30$

$x = 30 : 0{,}05$

$x = 600.$

Odpowiedź: Liczbą, której 5 % wynosi 30, jest 600.

✷ Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

<u>Przykład:</u> Jakim procentem liczby 40 jest liczba 8?

<u>I sposób:</u>

$40 - 100\%,$

$8 - x.$

$$x = \frac{8 \cdot 100\%}{40} = 20\%.$$

<u>II sposób:</u>

$\frac{8}{40} \cdot 100\% = 20\%.$

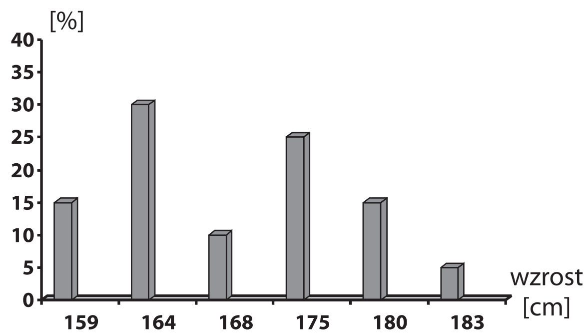
Odpowiedź: Liczba 8 stanowi 20 % liczby 40.

DIAGRAMY PROCENTOWE

✷ Diagram słupkowy

<u>Przykład:</u> Zmierzono wzrost 20 uczniów.

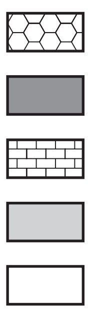
Otrzymano następujące wyniki:
159 cm – 3 osoby, co stanowi 15 %.
164 cm – 6 osób, co stanowi 30 %.
168 cm – 2 osoby, co stanowi 10 %.
175 cm – 5 osób, co stanowi 25 %.
180 cm – 3 osoby, co stanowi 15 %.
183 cm – 1 osoba, co stanowi 5 %.



✷ Diagram prostokątny

<u>Przykład:</u> 40 osób spytano, jaki jest ich ulubiony kolor.

Otrzymano następujące wyniki:
10 osób lubi kolor zielony.
6 osób lubi kolor czerwony.
8 osób lubi kolor niebieski.
12 osób lubi kolor czarny.
4 osoby lubią kolor biały.



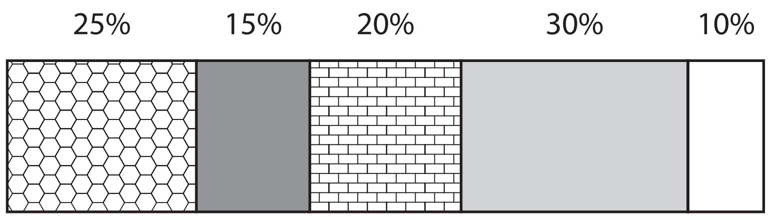
Zielony $\frac{10}{40} \cdot 100\% = 25\%.$

Czerwony $\frac{6}{40} \cdot 100\% = 15\%.$

Niebieski $\frac{8}{40} \cdot 100\% = 20\%.$

Czarny $\frac{12}{40} \cdot 100\% = 30\%.$

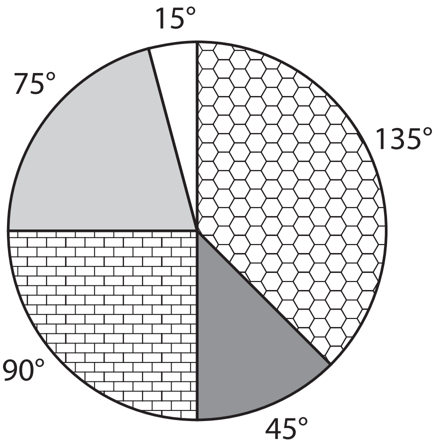
Biały $\frac{4}{40} \cdot 100\% = 10\%.$



✷ Diagram kołowy

Przykład: 24 uczniów spytano, jaki przedmiot lubią najbardziej.

Otrzymano wyniki:
9 osób lubi wychowanie fizyczne.
3 osoby lubią historię.
6 osób lubi geografię.
5 osób lubi język polski.
1 osoba lubi matematykę.



Obliczono odpowiadające im kąty:

	Wychowanie fizyczne	$\frac{9}{24}\cdot 360^\circ = 135^\circ$.
	Historia	$\frac{3}{24}\cdot 360^\circ = 45^\circ$.
	Geografia	$\frac{6}{24}\cdot 360^\circ = 90^\circ$.
	Język polski	$\frac{5}{24}\cdot 360^\circ = 75^\circ$.
	Matematyka	$\frac{1}{24}\cdot 360^\circ = 15^\circ$.

POTĘGI I PIERWIASTKI

✷ Wzory – własności potęgowania

Niech $a,\ b \in R$ i $n,\ k \in C$.

$a^1 = a;$

$a^0 = 1, \quad a \neq 0;$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0;$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad a,\ b \neq 0.$

Iloraz i iloczyn potęg o jednakowych podstawach:

$a^n \cdot a^k = a^{n+k}; \qquad a^n : a^k = a^{n-k}, \quad a \neq 0.$

Potęga iloczynu i ilorazu, potęga potęgi:

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n; \qquad (a:b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0; \qquad \left(a^n\right)^k = a^{n\cdot k}.$

Zapis wykładniczy liczb służy do zapisywania bardzo dużych i bardzo małych liczb, jest to zapis postaci:

$$a \cdot 10^n, \qquad \text{gdzie} \qquad n \in C, \qquad 1 \leq a < 10.$$

Przykład: $5\ 200\ 000 = 5{,}2 \cdot 10^6;$

$0{,}00000009 = 9 \cdot 10^{-8};$

$36\ 000\ 000\ 000 \cdot 0{,}0002 = 3{,}6 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 7{,}2 \cdot 10^6.$

✷ Wzory – własności pierwiastkowania

Niech $n \in N$ i $n \geq 2$;
$a, b \in R$, gdy n jest liczbą nieparzystą;
$a, b \in R$ i $a, b \geq 0$, gdy n jest liczbą parzystą.

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$;

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $b \neq 0$;

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

✷ Działania na pierwiastkach

Przykład:
$$5\sqrt{2} - \sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 7\sqrt{2} - \sqrt{3};$$
$$\sqrt{12} + \sqrt{18} - \sqrt{8} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{3} + \sqrt{2};$$
$$\sqrt{2}\left(2\sqrt{3} + \sqrt{8}\right) = 2\sqrt{2 \cdot 3} + \sqrt{2 \cdot 8} = 2\sqrt{6} + \sqrt{16} = 2\sqrt{6} + 4;$$
$$\left(\sqrt{5} + 1\right)\left(\sqrt{3} - 2\sqrt{5}\right) = \sqrt{5 \cdot 3} - 2\sqrt{5 \cdot 5} + \sqrt{3} - 2\sqrt{5} = \sqrt{15} - 2 \cdot 5 + \sqrt{3} - 2\sqrt{5} =$$
$$= \sqrt{15} - 10 + \sqrt{3} - 2\sqrt{5}.$$

✷ Usuwanie niewymierności z mianownika

Przykład:
$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{5 \cdot 3}}{3} = 2\sqrt{15};$$

$$\frac{2\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt[3]{10 \cdot 2}}{\sqrt[3]{4 \cdot 2}} = \frac{2\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{2\sqrt[3]{20}}{2} = \sqrt[3]{20};$$

$$\frac{4}{\sqrt{2} - 1} = \frac{4}{\left(\sqrt{2} - 1\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{2} + 1\right)}{\left(\sqrt{2} + 1\right)} = \frac{4\left(\sqrt{2} + 1\right)}{2 - 1} = \frac{4\sqrt{2} + 4}{1} = 4\sqrt{2} + 4;$$

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{3 + \sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{3} - 1\right)}{\left(3 + \sqrt{3}\right)} \cdot \frac{\left(3 - \sqrt{3}\right)}{\left(3 - \sqrt{3}\right)} = \frac{3\sqrt{3} - 3 - 3 + \sqrt{3}}{9 - 3} = \frac{4\sqrt{3} - 6}{6} = \frac{2\left(2\sqrt{3} - 3\right)}{6} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}.$$

II WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

✷ Wyrażenie algebraiczne

Wyrażenie algebraiczne jest to działanie, w którym występują liczby lub litery (natomiast w wyrażeniu arytmetycznym mogą występować jedynie liczby).

O nazwie wyrażenia algebraicznego decyduje działanie, które zgodnie z kolejnością działań należy wykonać jako ostatnie.

Przykład:	$\frac{(a+b)^2}{c}$	Iloraz kwadratu sumy liczb a i b przez liczbę c.
	x^3-3y	Różnica sześcianu liczby x i trzykrotności liczby y.
	$(2a)^4$	Czwarta potęga dwukrotności liczby a.

Porównywanie różnicowe

Przykład: Liczbę o 5 większą od liczby x zapisujemy: $x+5$.
Liczbę o 3 mniejszą od kwadratu liczby a zapisujemy: a^2-3.

Porównywanie ilorazowe

Przykład: Liczbę 5-krotnie większą od liczby x zapisujemy: $5x$.
Liczbę 3-krotnie mniejszą od kwadratu liczby a zapisujemy: $\frac{a^2}{3}$.

Uwaga!
Jeśli $n \in N$, to:

- Trzy kolejne liczby naturalne: n, $n+1$, $n+2$.
- Trzy kolejne liczby parzyste: $2n$, $2n+2$, $2n+4$.
- Trzy kolejne liczby nieparzyste: $2n+1$, $2n+3$, $2n+5$.
- Liczba podzielna przez 5: $5n$.
- Liczba, która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3: $5n+3$.
- Trzy kolejne liczby podzielne przez 4: $4n$, $4n+4$, $4n+8$.

Jeśli x – cyfra jedności, y – cyfra dziesiątek, z – cyfra setek, to:

- Liczba dwucyfrowa: $10y+x$.
- Liczba trzycyfrowa: $100z+10y+x$.

✷ Jednomian

Jednomian jest to pojedyncza liczba bądź litera lub ich iloczyn.

Przykład: 2; -4; x; $3a$; $-a^2b^5$; $1\frac{1}{7}xy^2z^4$.

Porządkowanie jednomianu

Przykład: $-1\cdot x\cdot y\cdot y^2\cdot(-2)\cdot x^3\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-x^5y^3$;

$-2\cdot a\cdot b^3\cdot(-3)\cdot c^2\cdot a^3\cdot b^5\cdot c=6a^4b^8c^3$.

✷ Wyrazy podobne

Wyrazy podobne są to jednomiany, które różnią się co najwyżej współczynnikiem liczbowym.

Przykład: Wielomiany podobne do $2x$ to: $3x$; $-5x$; $0{,}4x$; $2x$; $\frac{2}{3}x$.
Wielomiany podobne do $-6a^2b$ to: a^2b; $\sqrt{2}a^2b$; $-aba$; $8\frac{1}{2}a^2b$.

✷ Wielomian

Wielomian jest to suma jednomianów.

Przykład: $a+b^2$; $-4x+3y-z$; $\frac{3}{4}a^2-2b\sqrt{3}+c^5-0{,}5$.

✷ Działania na wyrażeniach algebraicznych

Redukcja (zliczanie) wyrazów podobnych

Przykład: $4a-2b-a+7b+c=3a+5b+c$;
$x^2-3x+5xy-6x-2xy+3x^2=4x^2-9x+3xy$.

Opuszczanie nawiasów zgodnie z zasadami dotyczącymi znaków

Przykład: $(a+b)+(2a-b)=a+b+2a-b=3a$;
$(a+b)-(2a-b)=a+b-2a+b=-a+2b$;
$(-a+3b)-(-5a+4b-2c)=-a+3b+5a-4b+2c=4a-b+2c$.

Mnożenie wielomianów

Przykład: $3a(a+b)=3a^2+3ab$;
$-4x\left(-2x+3y-5x^3\right)=8x^2-12xy+20x^4$;
$(a+b)(2a-3b)=2a^2-3ab+2ab-3b^2=2a^2-ab-3b^2$;
$(x-2y)\left(-2x^2+xy\right)=-2x^3+x^2y+4x^2y-2xy^2=-2x^3+5x^2y-2xy^2$.

✷ Wzory skróconego mnożenia

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; — ***kwadrat sumy***

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$; — ***kwadrat różnicy***

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. — ***różnica kwadratów***

Przykład: $(3x+4y)^2=9x^2+24xy+16y^2$;
$\left(5a^2-ab^3\right)^2=25a^4-10a^3b^3+a^2b^6$;
$\left(6x-y^5z\right)\left(6x+y^5z\right)=36x^2-y^{10}z^2$;
$\left(2\sqrt{5}+5x\right)^2=20+20x\sqrt{5}+25x^2$;
$\left(2a-\sqrt{3}\right)^2=4a^2-4a\sqrt{3}+3$;
$\left(x\sqrt{7}+4\right)\left(x\sqrt{7}-4\right)=7x^2-16$.