



GeoGebra

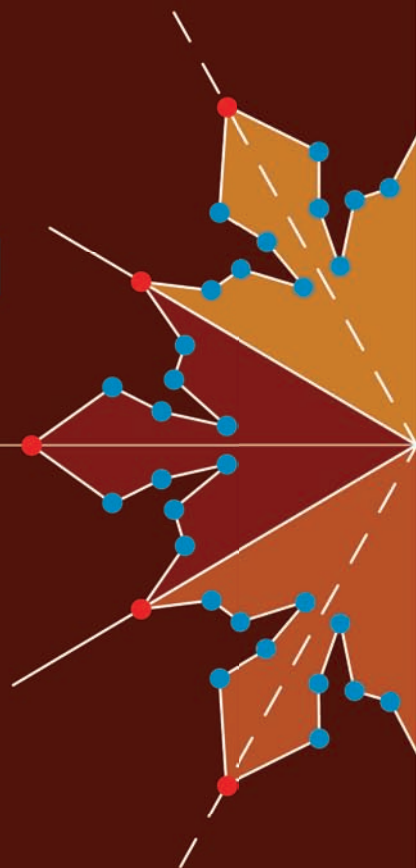
INNOWACJA EDUKACYJNA
– KONTYNUACJA

redakcja naukowa

Katarzyna WINKOWSKA-NOWAK

Edyta POBIEGA

Robert SKIBA



SEDNO
Wydawnictwo
Akademickie



SWPS
SZKOŁA WYŻSZA PSYCHOLOGII SPOŁECZNEJ





GeoGebra

INNOWACJA EDUKACYJNA
– KONTYNUACJA



GeoGebra

INNOWACJA EDUKACYJNA
– KONTYNUACJA

redakcja naukowa

Katarzyna WINKOWSKA-NOWAK

Edyta POBIEGA

Robert SKIBA



SEDNO
Wydawnictwo
Akademickie



SWPS

SZKOŁA WYŻSZA PSYCHOLOGII SPOŁECZNEJ



Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
w Toruniu

Wydawca
Bożena Kućmierowska

Recenzenci
dr Wojciech Borkowski
dr Krzysztof Leśniak

Redakcja merytoryczna i korekty
Irena Zielińska

Redakcja techniczna
Danuta Przymanowska-Boniuk

Projekt okładki, stron tytułowych i opracowanie typograficzne
Wojciech Stukonis

Publikacja jest wspólną inicjatywą wydawniczą Szkoły Wyższej Psychologii Społecznej,
Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu
oraz Wydawnictwa Akademickiego Sedno

Copyright © by Wydawnictwo Akademickie Sedno
Warszawa 2013

Wszelkie prawa zastrzeżone.
Kopiowanie, przedrukowywanie i rozpowszechnianie w całości
lub we fragmentach jakąkolwiek techniką bez pisemnej zgody wydawcy zabronione.

ISBN 978-83-63354-21-3
ISBN 978-83-62443-33-8
ISBN 978-83-63354-88-6 (e-book)

Wydawnictwo Akademickie Sedno Spółka z o.o.
00-696 Warszawa
ul. J. Pankiewicza 3
www.wydawnictwosedno.pl

Szkoła Wyższa Psychologii Społecznej
03-815 Warszawa
ul. Chodakowska 19/31
www.swps

■ Spis treści

1.	Wstęp	
	• Katarzyna Winkowska-Nowak, Edyta Pobiega, Robert Skiba	11
2.	Zastosowanie GeoGebry w realizacji zagadnień związanych z trygonometrią	13
2.1.	Wykresy funkcji $\sin x$ i $\cos x$ • Paweł Perekietka	13
2.2.	Wykres funkcji $y=\operatorname{tg} x$ • Jolanta Tarajkowska	15
2.3.	Przesuwanie wykresów funkcji trygonometrycznych • Janina Konieczna	18
2.4.	Symetrie wykresów funkcji trygonometrycznych • Anna Smal	23
2.5.	Wykresy funkcji $y=kf(x)$ oraz $y=f(kx)$ na przykładzie funkcji trygonometrycznych • Daria Szalińska	29
2.6.	Wykres funkcji $y= f(x) $ na przykładzie funkcji trygonometrycznych • Anna Skorupa	32
2.7.	Wykres funkcji $y=f(x)$ na przykładzie funkcji trygonometrycznych • Janusz Bis	34
2.8.	Wykresy funkcji trygonometrycznych w przedziałach • Joanna Leszek	36
2.9.	Zbiór wartości funkcji złożonej • Lucyna Wątroba	39
2.10.	Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów: 30° , 45° , 60° • Agata Matuszczak	44
3.	Przykłady zastosowań GeoGebry w szkole ponadgimnazjalnej	
	• Janina Konieczna	49
3.1.	Wizualizacja średniej geometrycznej dwóch liczb dodatnich	49

3.2.	Konstrukcja odcinka o długości $x = \sqrt{n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}^+$	53
3.3.	Dowód geometryczny i algebraiczny nierówności – porównanie średniej arytmetycznej i geometrycznej	57
3.4.	Proste nierówności z wartością bezwzględną	61
3.5.	Graficzne rozwiązywanie nierówności	66
4.	Fakty i mity o trapezie i równoległoboku • Joanna Leszek	70
5.	Przykłady zastosowań GeoGebry w szkole ponadgimnazjalnej • Jolanta Tarajkowska	75
5.1.	Kąt środkowy, wpisany i dopisany – wizualizacja tych pojęć oraz ich własności. Wykorzystanie podstawowych narzędzi, zastosowanie suwaka i wstawianie tekstów dynamicznych	75
5.2.	Badanie własności czworokąta wpisanego w okrąg. Zastosowanie paska nawigacji etapów konstrukcji	78
5.3.	Badanie liczby rozwiązań równania $ f(x) = m$ w zależności od parametru m	81
6.	Kąty w okręgu – warsztaty dla nauczycieli szkół ponadgimnazjalnych • Daria Szalińska	84
6.1.	Wizualizacja twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym opartych na tym samym łuku	84
6.2.	Wizualizacja i uzasadnienie wniosków z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym opartych na tym samym łuku	86
6.3.	Wizualizacja i uzasadnienie twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą okręgu	91
6.4.	Wizualizacja rozwiązań zadań	94
7.	Inne geometrie • Ryszard Kania	96
8.	Pochodna funkcji w GeoGebra • Małgorzata Zbińkowska	99
8.1.	Kształtowanie pojęcia pochodnej funkcji w punkcie	99
8.2.	Monotoniczność a pochodna	103

9.	Zadania optymalizacyjne, funkcja kwadratowa i GeoGebra	107
9.1.	Punkt na paraboli • Joanna Leszek	107
9.2.	Pudełko o największym polu powierzchni bocznej • Daria Szalińska	112
9.3.	Obrus o największej powierzchni • Anna Skorupa	116
9.4.	Czworokąt o najmniejszym oraz o największym polu • Janina Konieczna	120
9.5.	Najmniejsza odległość uczniów • Małgorzata Zbińkowska	123
9.6.	Serwetka o największym polu • Janusz Bis	127
10.	Optymalizacja (ale nie funkcja kwadratowa)	131
10.1.	Największa objętość • Agata Matuszczak	131
10.2.	Optymalizacja inaczej – najmniejsza suma odległości punktów od prostej • Małgorzata Zbińkowska	136
11.	Przykłady zastosowań GeoGebry na lekcjach matematyki w szkole podstawowej • Anna Skorupa, Janusz Bis	140
11.1.	Rodzaje trójkątów – wykorzystanie podstawowych narzędzi GeoGebry	140
11.2.	Pole trójkąta – wizualizacja	146
11.3.	Obwody prostokątów i kwadratów – zadania z podręcznika	150
11.4.	Klasyfikacja czworokątów – domino – eksport obrazka z GeoGebry do edytora tekstowego	154
11.5.	Co to jest skala? – wizualizacja w programie GeoGebra	157
12.	Przykłady zastosowań GeoGebry na lekcjach matematyki w gimnazjum • Agata Matuszczak	160
12.1.	Posługiwanie się podstawowymi narzędziami, tworzenie obiektów, tworzenie tekstów, wybieranie właściwości obiektów w okienkach Właściwości, używanie suwaka i pól wyboru	160

12.2.	Wykorzystywanie Widoku Algebry, pola wprowadzania, okna Przededefiniuj, Protokołu konstrukcji do odtwarzania kolejnych etapów konstrukcji	167
12.3.	Wstawianie obrazka, warunki wyświetlania obiektów, kolory dynamiczne	173
13.	Przydatne triki GeoGebry, które ułatwiają pracę z programem • Agata Matuszczak	177
13.1.	Niesforna czcionka	177
13.2.	Obiekty poza polem widzenia	177
13.3.	Nazywanie obiektów	178
13.4.	Przewidywanie nazw obiektów	178
13.5.	Zmiana nazwy obiektu na nazwę komórki Arkusza	178
13.6.	Powielanie tekstów i obiektów	178
13.7.	Spacja zamiast *	179
13.8.	„Ściąganie” obiektów do pola wprowadzania	179
13.9.	Pamięć pola wprowadzania	179
13.10.	Tworzenie obiektu w wybranym Widoku Grafiki	179
13.11.	Zaznaczanie obiektów	180
13.12.	Czyszczenie śladu w Widoku Grafiki „obok”	181
13.13.	Skróty klawiszowe	181
13.14.	Warunki	181
13.15.	Kolory dynamiczne	181
13.16.	LaTeX	182
13.17.	Umieszczanie obiektów w tekście	183
13.18.	Wykonywanie działań w edytorze tekstu	184

13.19.	Obliczenia na punktach	185
13.20.	„Pusty pierścień”	186
13.21.	Skokowa animacja	187
13.22.	Okieźnianie pól wyboru	188
14.	Skrypty w GeoGebra • Jerzy Mil	191
14.1.	Kiedy GeoGebraScript, a kiedy JavaScript?	191
14.2.	Przeskalowanie widoku grafiki – dwa rozwiązania tego samego zadania	191
14.3.	Przyciski sterujące animacją	193
14.4.	Włączanie i wyłączanie siatki i osi w Widoku Grafiki	193
14.5.	Test „Położenie punktu w układzie współrzędnych”	197
14.6.	Klawiatura numeryczna	200
14.7.	Test „Funkcja liniowa”	204
14.8.	Figury osiowosymetryczne	207
DODATEK A	Wybrane polecenia GeoGebry wersja 4.0 • Edyta Pobiega, Katarzyna Pobiega	210
	Algebra	210
	Arkusz	212
	Funkcje i obliczenia	213
	GeoGebra	219
	Geometria	221
	Lista	227
	Logika	231
	Przekształcenia	233

DODATEK B

Skrypty	234
Statystyka	242
Tekst	249
Wektory i macierze	252
Wykres	254
Wybrane metody JavaScript w GeoGebra • Jerzy Mil	258
Wstęp	258
Podstawowe metody	258
Ustawianie właściwości obiektów	259
Pobieranie właściwości obiektów	260
Konstrukcja/Interfejs użytkownika	262
Informacje o autorach	263

1 Wstęp

Niniejsza książka stanowi kontynuację wydanej w 2011 roku przez Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu pozycji pt. *GeoGebra. Wprowadzanie innowacji edukacyjnej* pod redakcją Katarzyny Winkowskiej-Nowak oraz Roberta Skiby. Książka została bardzo życzliwie przyjęta przez użytkowników programu GeoGebra (w skrócie GG), dlatego postanowiliśmy wydać następną. Niestety okazuje się, że nadal na polskim rynku wydawniczym brakuje publikacji poświęconych GeoGebra. Druga część „naszej opowieści o GG” stanowi więc próbę (miejmy nadzieję udaną) wypełnienia tej luki na rynku księgarskim. Przypomnijmy, że GeoGebra jest bezpłatnym oprogramowaniem wspierającym edukację matematyczną na różnych poziomach – od szkoły podstawowej po wyższą uczelnię. Program GG należy do kategorii interaktywnych (dynamicznych) środowisk geometrycznych. Tym niemniej pozwala również na wizualizacje zagadnień z algebry i analizy matematycznej. Nad rozwojem programu pracują specjaliści z wielu ośrodków akademickich całego świata (podkreślimy, że mamy już obecnie wersję 4.0), zaś koordynatorem całego przedsięwzięcia jest twórca programu – Markus Hohenwarter (Uniwersytet w Linz).

GeoGebra. Innowacja edukacyjna – kontynuacja to książka przeznaczona zarówno dla nauczycieli szkół ponadgimnazjalnych, jak i gimnazjów i szkół podstawowych, którzy chcą urozmaicić swoje metody uczenia matematyki ciekawymi prezentacjami, interaktywnymi plikami i tzw. apletami z GG. Materiał w niniejszej książce został podzielony zgodnie z poziomem edukacji i został zaklasyfikowany do poszczególnych dziedzin matematyki, takich jak: geometria, algebra czy analiza. Redaktorzy mają nadzieję, że publikacja ta dużo mocniej zainspiruje czytelnika do innowacyjnego wykorzystania programu GG na zajęciach zarówno w postaci gotowych materiałów, jak i zmodyfikowanych już istniejących, które można pobrać z następującej strony WWW: <https://sites.google.com/site/ggiwarszawa/geogebra-w-przykladach-pliki>.

Książka została podzielona na czternaście rozdziałów i dwa dodatki. Rozdział pierwszy zawiera krótkie wprowadzenie do książki. Z kolei rozdział drugi zawiera już przykłady zastosowań GeoGebry w nauczaniu trygonometrii w szkole. Między innymi zostały poruszone takie zagadnienia z trygonometrii, jak: przesuwanie wykresów funkcji trygonometrycznych o dany wektor, wizualizacja wykresów funkcji $y=|f(x)|$, gdzie $f(x)$ może być jedną z funkcji trygonometrycznych $\sin x$, $\cos x$ lub $\tan x$ oraz obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych dla konkretnych kątów w nawiązaniu do związków miarowych w trójkącie równobocznym i kwadracie. Natomiast w trzecim rozdziale opisano sposoby ilustracji przy użyciu programu GG związków między geometrią a algebrą. Ponadto zawiera przykłady konstrukcji geometrycznych wykonanych w programie GeoGebra.

Rozdziały od czwartego do szóstego zostały całkowicie zdominowane przez planimetrię, głównie przez trapezy, równoległoboki oraz kąty wpisane w okrąg i dopisane do okręgu. W szczególności zostały opisane aplety w GG, które dotyczą takich zagadnień, jak: konstrukcja równoległoboku

o zadanych długościach boków i danym kącie, wizualizacja pojęcia kąta wpisanego, środkowego i dopisanego oraz własności czworokąta wpisanego w okrąg itd.

W rozdziale siódmym przechodzimy „w sposób gładki” do geometrii nieeuklidesowych, a dokładniej do własności geometrii Łobaczewskiego, która została zaprezentowana (oczywiście!) w programie GG.

Rozdziały od ósmego do dziesiątego zostały poświęcone, ku radości jednego z redaktorów tej książki, analizie matematycznej, tzn. pojęciu pochodnej i jej roli w badaniu monotoniczności funkcji. W szczególności poruszone zostały zagadnienia optymalizacyjne wywodzące się z planimetrii, stereometrii oraz geometrii analitycznej.

Materiał zawarty w rozdziałach jedenastym i dwunastym został zdominowany przez trójkąty, czworokąty i ich (wewnętrzne) kąty; między innymi zawiera aplety poruszające takie zagadnienia, jak: klasyfikacja trójkątów i czworokątów czy metody obliczania miar kątów w rozmaitych konfiguracjach.

Trzynasty rozdział (pechowy?) powinien zainteresować wszystkich użytkowników programu GG, ponieważ zawiera triki odkryte podczas użytkowania tego programu. Opisane triki powinny pomóc czytelnikowi w codziennej obsłudze GG.

Z kolei czternasty rozdział oraz Dodatek B wprowadzają czytelnika w krainę języków skryptowych, rozszerzających podstawowe funkcjonalności programu. Skoncentrowano się tam na opisie różnic między GeoGebraScript (język dedykowany GG) a JavaScript (popularny język programowania zwykle kojarzony z zastosowaniami w przeglądarkach internetowych).

Dodatek A ma natomiast charakter Helpu do programu GG. Innymi słowy, zostały w nim zebrane najważniejsze polecenia z programu GeoGebra (wersja 4.0).

Na zakończenie chcielibyśmy zwrócić uwagę, że książka ta powstała dzięki wspólnym nauczycielom, którzy zakochali się w programie GG od pierwszego wejrzenia. To Oni są autorami wszystkich artykułów, które właśnie stanowią zawartość tej książki! Redaktorzy niniejszej pozycji są Wam bardzo za to wdzięczni – dziękujemy!

Katarzyna Winkowska-Nowak
Edyta Pobiega
Robert Skiba

2

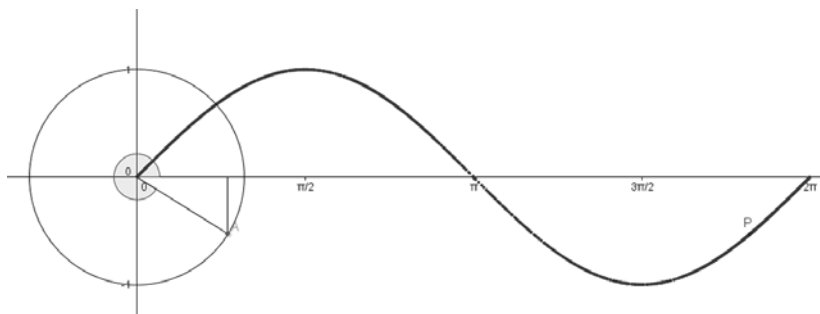
Zastosowanie GeoGebry w realizacji zagadnień związanych z trygonometrią

21.

Paweł Perekietka Wykresy funkcji $\sin x$ i $\cos x$

Poniżej znajduje się propozycja wizualizacji konstrukcji wykresu funkcji sinus w przedziale $<0, 2\pi>$: z punktu A okręgu jednostkowego wystawiamy odcinek prostopadły do osi OX – jego długość jest wartością sinusa dla kąta, jaki odcinek OA tworzy z dodatnią częścią osi OX.

■ Efekt końcowy powinien wyglądać tak

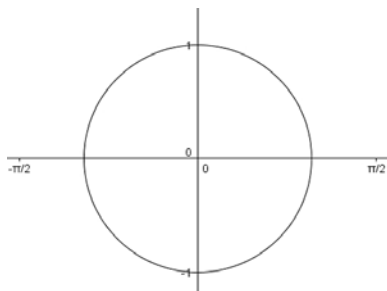



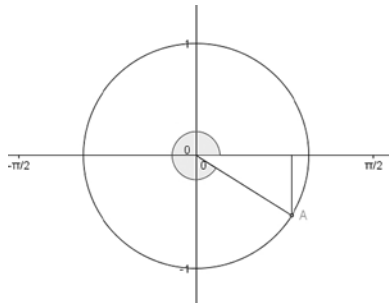

■ Instrukcja do samodzielnego wykonania

- Korzystać będziemy tylko z widoku Widok Grafiki (menu Widok|Widok Grafiki).

Zapisane poniżej w tabeli polecenia wpisywać należy w polu wprowadzania (u dołu ekranu).

1	Ustawiamy jako podstawową odległość osi OX wartość $\pi/2$ (menu Opcje Ustawienia Widok Grafiki OśX).
2	Rozpoczynamy od narysowania jednostkowego okręgu O o środku w początku układu współrzędnych: O = Okrag[(0,0),1] .



3		Na okręgu O umieszczamy punkt A: A = Punkt[O] .
4		Przesuwamy nowo utworzony punkt po okręgu (przy pomocy myszki) powyżej osi OX i rysujemy dwa odcinki yA oraz r , ilustrujące odpowiednio rzędną punktu A oraz promień okręgu poprowadzony do punktu A: $yA = \text{Odcinek}[x(A),0,A]$ (zapis $x(A)$ pozwala wyznaczyć wartość odciętej punktu A) $r = \text{Odcinek}[(0,0),A]$.
5		Tworzymy kąt α w układzie współrzędnych tak, aby punkt A leżał na drugim jego ramieniu: $\alpha = \text{Kąt}[(1,0),(0,0),A]$ (symbol α wybieramy z zestawu symboli, dostępnego po kliknięciu w odpowiednią ikonę po prawej stronie pola wprowadzania).
		
6		Wprowadzamy w układzie współrzędnych punkt P o współrzędnych (α, yA) $P = (\alpha, yA)$ i uaktywniamy jedną z jego właściwości – „Pokaż ślad” (klikamy prawym klawiszem myszki na punkcie P i wybieramy odpowiednią opcję z menu kontekstowego).
7		Przesuwamy punktem A po okręgu. W ślad za nim przesuwają się punkt P i ukazuje się sinusoida.

W celu uzyskania wykresu funkcji cosinus zamiast odcinka yA należy narysować odcinek x_A (ilustracja odciętej punktu na okręgu jednostkowym) **$x_A = \text{Odcinek}[x(A),0,(0,0)]$** oraz w odpowiedni sposób zdefiniować punkt P: **$P = (\alpha, x(A))$** .

2.2.

Jolanta Tarajkowska
Wykres funkcji $y = \tan x$

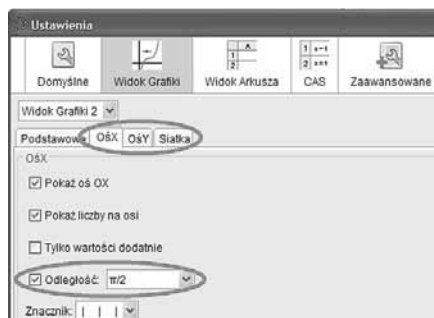
1

Włącz **Widok Grafiki** i **Widok Grafiki 2**. Zaznacz **Osie**. Wyłącz widok algebry.
W Widoku Grafiki mają być widoczne tylko osie bez siatki.



2

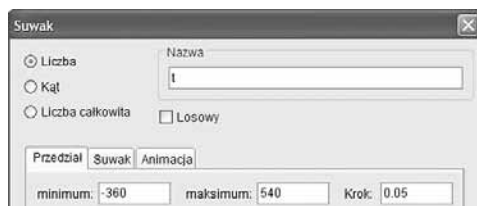
W **Widoku Grafiki 2** zaznacz **Siatkę** i ustaw jednostki na osiach X i Y;
zakładka **OśX**: odległość: $\pi/2$; zakładka **OśY**: odległość: 0.5; zakładka **Siatka**:
odległość x: $\pi/6$, y: 0.5.



3

a = 2

Punkty od 3 do 13 realizuj w Widoku Grafiki (kliknięcie w okno uaktywni go).
Wstaw suwak, ustaw minimum -360 , maksimum 540 , krok 0.05 i nazwij go t .



4

a = 2

W oknie właściwości suwaka t w zakładce **Podstawowe**, w polu **Opis** wpisz α ,
zaznacz **Pokaż etykietę**, rozwiń listę i wybierz **Opis**.

5

Wstaw punkty $A = (0,0)$ i $B = (1,0)$. Narysuj okrąg o środku $(0,0)$
i promieniu 1, okrąg $c = \text{Okrąg}[A, 1]$.

6



Wpisz w polu wprowadzania $P = \text{Obrót}[B, t^\circ, A]$.

7

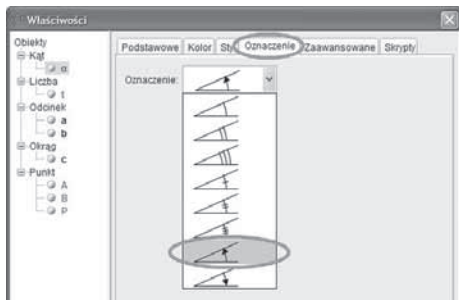


Narysuj odcinek $[A, B]$ i odcinek $[A, P]$.

8



Kąt [B,A,P] **Właściwości/Podstawowe** odznacz pole Pokaż etykietę, **Właściwości/Oznaczenie** z rozwijanej listy wybierz symbol kąta ze strzałką w górę, w zakładce **Zaawansowane** wpisz warunek wyświetlania obiektu: $t > 0$.



9



W polu wprowadzania wpisz Kąt[P,A,B], we **Właściwościach/Oznaczenie** wybierz odpowiedni symbol kąta ze strzałką w dół, w zakładce **Zaawansowane** wpisz warunek wyświetlania $t < 0$.

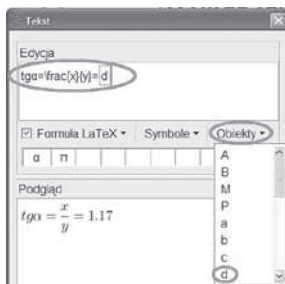
10

Wpisz w polu wprowadzania liczbę $\tan(t^\circ)$.

11

ABC

Wpisz tekst1: „ $\tan \alpha = \frac{x}{y} = d$ ”, zaznacz **Formuła LaTeX**.
Skorzystaj z rozwijanej listy **Obiekty** i wstaw wartość liczby d.



12

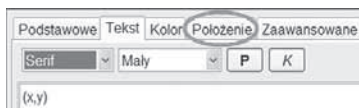
ABC

Wpisz tekst2: „ $\alpha = t^\circ$ ” (t wstaw z rozwijanej listy **Obiekty** jw.).

13

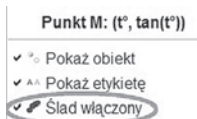
ABC

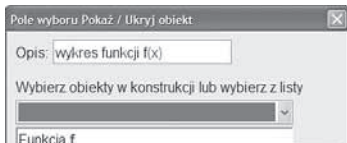
Wpisz tekst3: „(x, y)” we **Właściwościach** w zakładce **Położenie** i po rozwinięciu wybierz z listy punkt początkowy P.



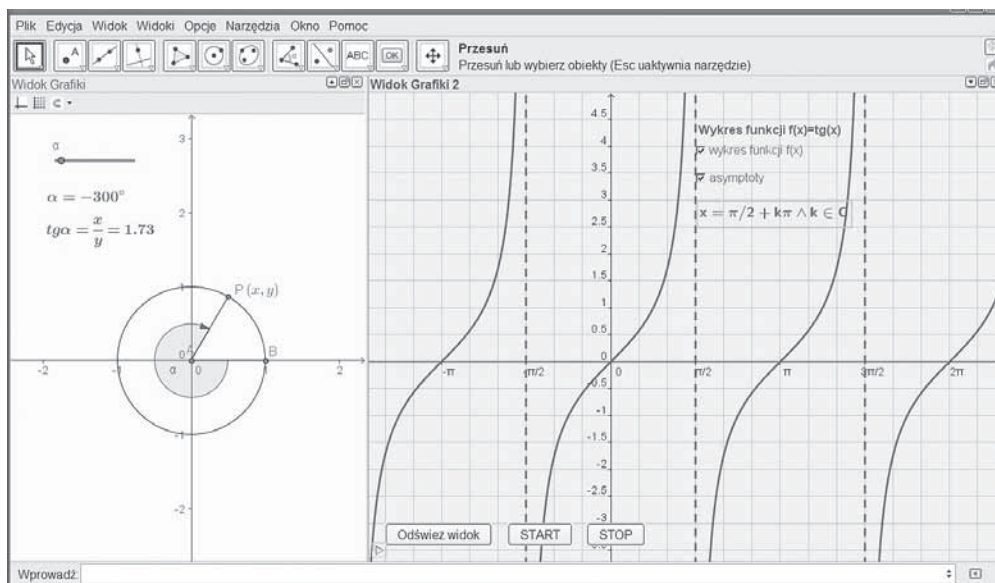
14

Punkty od 14 do 23 realizuj w Widoku Grafiki 2 (kliknięcie w okno uaktywni go).
Wpisz w polu wprowadzania punkt: $M = (t^\circ, \tan(t^\circ))$, we **Właściwościach** włącz **Ślad włączony**.



15		W polu wprowadzania wpisz $f(x)=\tan(x)$.
16		W polu wprowadzania wpisz Ciąg $[x=\pi/2+k\pi, k, -10, 10]$.
17		Wstaw pole wyboru b w opisie: wykres funkcji tgx, połącz z obiektem funkcja $f(x)=\tan(x)$. 
18	ABC	Wstaw tekst4: „ $x=\pi/2+k\pi \wedge k \in \mathbb{C}$ ”.
19		Wstaw pole wyboru o w opisie: asymptoty, połącz z obiektami lista1, tekst4.
20	ABC	Wstaw tekst5: „Wykres funkcji $f(x)=\text{tg}x$ ”.
21		Wstaw przycisk1 w opisie „odśwież widok”, w GeoGebraScript, wpisz: PrzybliżWidok[1] .
22		Wstaw przycisk2 w opisie: START, w GeoGebraScript RozpocznijAnimację[t] .
23		Wstaw przycisk3 w opisie: Stop, GeoGebraScript RozpocznijAnimację[False] .
24		Ukryj niepotrzebne elementy, ustaw kolory, styl, grubość linii itd.

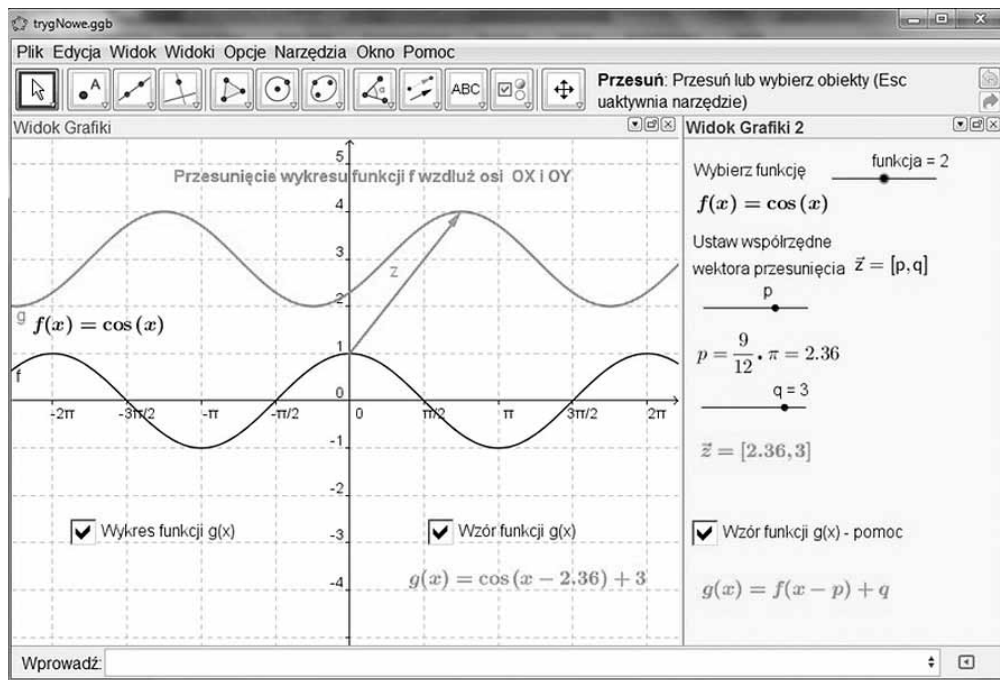
Oczekiwany efekt



2.3. Janina Konieczna Przesuwanie wykresów funkcji trygonometrycznych

Przedmiotem poniższej instrukcji jest wykonanie mathletu ilustrującego przesuwanie wykresów funkcji trygonometrycznych o wektor wzdłuż osi OX, wzdłuż osi OY oraz przesuwanie względem obu osi.

■ Zakładany efekt końcowy



■ Instrukcja do samodzielnego wykonania

- Włącz Widok Grafiki i Widok Grafiki 2.
- Widok Grafiki: włącz Osie i siatkę, oś x: jednostka $\pi/2$.
- Widok Grafiki 2: wyłącz osie i siatkę, tło: jasnożółte.

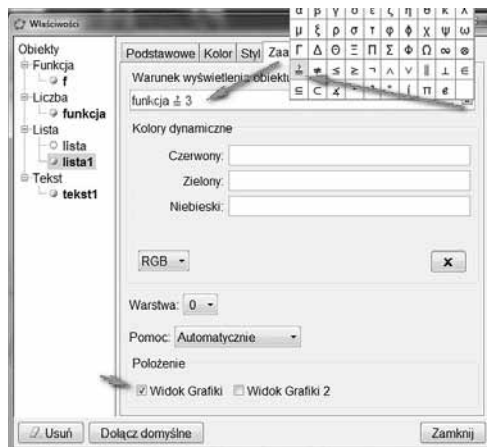
1		W polu wprowadzania wpisz: lista = {sin(x), cos(x), tan(x)}.
2	ABC	Widok Grafiki 2. Wpisz tekst1: Wybierz funkcję.
3	$a = 2$	Widok Grafiki 2. Wstaw suwak o nazwie funkcja. Ustaw: Przedział: minimum 1, maksimum 3, Krok 1.
4		Widok Grafiki. Wpisz w polu wprowadzania: $f = \text{Element}[\text{lista}, \text{funkcja}]$. Właściwości wykresu funkcji f: Styl: Grubość prostej 3, Kolor czarny.

5

Widok Grafiki.

Wpisz w polu wprowadzania: lista1=Ciąg[$x=\pi/2+n*\pi, n, -4, 4, 1$].Właściwości: Zaawansowane: Warunek wyświetlania obiektu: funkcja $\neq 3$,

Styl: Styl prosty – przerywany, Grubość 3, Kolor czarny.

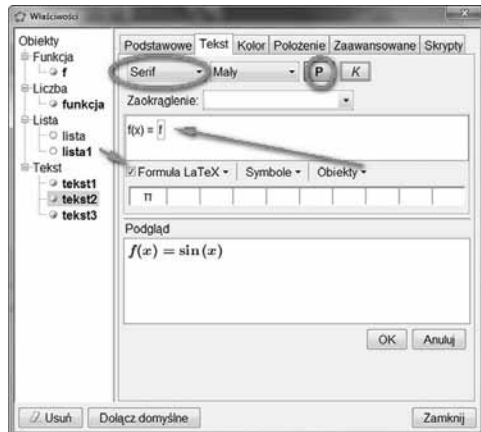
Polecenie to określa nam asymptoty wykresu funkcji $y = \tan x$.

6

ABC

Widok Grafiki. Wstaw dynamiczny tekst2: $f(x) = [f]$, wybierając wartość $[f]$ z listy Obiektów. Zaznacz Formuła LaTeX.

Właściwości: Tekst: Serif, Mały, pogrubiony (zaznacz P), dopasuj położenie tekstu.



7

ABC

Widok Grafiki 2. Wstaw dynamiczny tekst3: $f(x) = [f]$, wybierając wartość $[f]$ z listy Obiektów. Zaznacz Formuła LaTeX.

Właściwości: Tekst: Serif, Mały, pogrubiony (zaznacz P), dopasuj położenie tekstu.

8

ABC

Widok Grafiki 2. Wstaw tekst4: Ustaw współrzędne wektora przesunięcia $\vec{z} = [p, q]$. Właściwości: Tekst: Sans Serif, zaznacz Formuła LaTeX Tekst pogrubiony.

9

a = 2

Widok Grafiki 2. Wstaw suwak o nazwie k. Ustaw Przedział: minimum -24, maksimum 24, krok 1. Właściwości Podstawowe: Opis p, Pokaż etykietę: Opis.

10

Wpisz w polu wprowadzania: $p = k/12 \cdot \pi$.

11

ABC

Widok Grafiki 2. Zaznacz formułę LaTeX.

Wstaw dynamiczny tekst5: $p = \frac{k}{12} \cdot \pi = [p]$, wybierając wartości $[k]$, $[p]$ z listy Obiekt, natomiast symbole: ułamek, liczby π możesz wstawić z rozwinięcia Formuła LaTeX Symbol lub wpisując formułę na klawiaturze.

12

a = 2

Wstaw suwak q .

Przedział: minimum -5, maksimum 5, Krok: 0.1.

13

W polu wprowadzania wpisz: $r = \text{Max}[\text{sgn}(\text{abs}(q)), 0]$.

Formuła ta daje nam $r = 1$ dla $q \neq 0$ oraz $r = 0$ dla $q = 0$.

Wykorzystamy r do określania dynamicznych kolorów.

14

W polu wprowadzania wpisz: $t = \text{Max}[\text{sgn}(\text{abs}(p)), 0]$.

Formuła ta daje nam $t = 1$ dla $p \neq 0$ oraz $t = 0$ dla $p = 0$.

Wykorzystamy t do określania dynamicznych kolorów.

15

Widok Grafiki. W polu wprowadzania wpisz $z = (p, q)$.

Właściwości wektora \vec{z} : Podstawowe: Pokaż etykietę: Nazwa, Styl: Grubość prostej 3, Położenie: Punkt początkowy: $(0, f(0))$, Zaawansowane: Kolory dynamiczne: Czerwony: r , Zielony: 0, Niebieski: t .

16



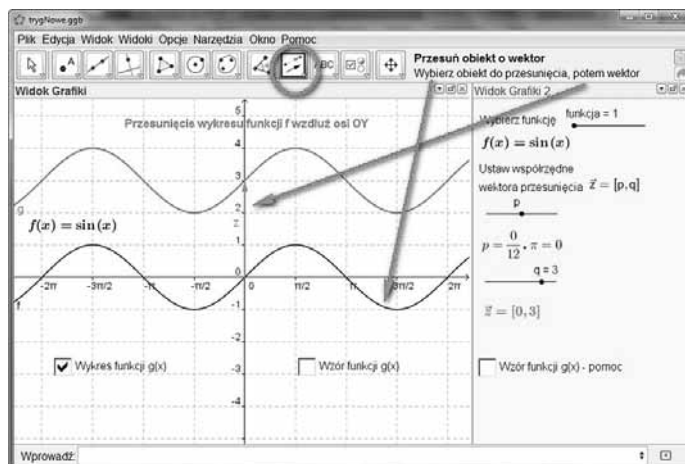
Przesuń o wektor \vec{z} funkcję f .

Wybierz z paska narzędziowego przesunięcie o wektor, kliknij w funkcję f i wektor \vec{z} .

Zmień nazwę funkcji na g .

Właściwości: Podstawowe: Pokaż etykietę: Nazwa, Styl: Grubość prostej 4

Zaawansowane: Kolory dynamiczne: Czerwony: r , Zielony: 0, Niebieski: t .



17



Ustaw suwak funkcja = 3. Przesuń o wektor \vec{z} asymptotę.

Wybierz z paska narzędziowego translację o wektor, kliknij w asymptotę i wektor \vec{z} .

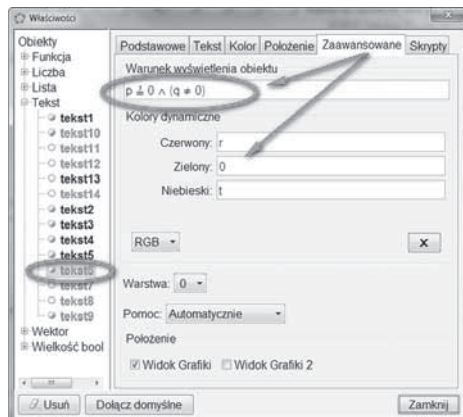
Właściwości: Styl: Styl prostej przerywany, Grubość 4,

Zaawansowane: Warunek wyświetlania obiektu: funkcja $\neq 3$.

Kolory dynamiczne: Czerwony: r , Zielony: 0, Niebieski: t .

18 ABC

Widok Grafiki. Wstaw tekst6: Przesunięcie wykresu funkcji f wzdłuż osi OY.
 Właściwości: Zaawansowane: Warunek wyświetlania obiektu: $p \neq 0 \wedge (q \neq 0)$.
 Kolory dynamiczne: Czerwony: r , Zielony: 0 , Niebieski: t .



19 ABC

Widok Grafiki. Wstaw tekst7: Przesunięcie wykresu funkcji f wzdłuż osi OX.
 Właściwości: Zaawansowane: Warunek wyświetlania obiektu: $(p \neq 0) \wedge q \neq 0$.
 Kolory dynamiczne: Czerwony: r , Zielony: 0 , Niebieski: t .
 Tekst: pogrubiony.

20 ABC

Widok Grafiki. Wstaw tekst8: Przesunięcie wykresu funkcji f wzdłuż osi OX i OY.
 Właściwości: Zaawansowane: Warunek wyświetlania obiektu: $(p \neq 0) \wedge (q \neq 0)$.
 Kolory dynamiczne: Czerwony: r , Zielony: 0 , Niebieski: t .
 Tekst: pogrubiony.

21 ABC

Widok Grafiki 2. Zaznacz Formuła LaTeX. Wpisz dynamiczny tekst9:
 $\vec{z} = [\underline{p}, \underline{q}]$, wybierając wartości \underline{p} , \underline{q} z listy Obiekt.
 Tekst: pogrubiony.
 Kolory dynamiczne: Czerwony: r , Zielony: 0 , Niebieski: t .

22 ABC

Widok Grafiki. Wpisz dynamiczny tekst10: $g(x) = \underline{g}$

23

Widok Grafiki. Wstaw pole wyboru „a” z Opisem: Wzór funkcji $g(x)$ i połącz z tekst10 wybierając z listy Obiekty.

24 ABC

Widok Grafiki 2. Wpisz tekst11: $g(x) = f(x) + q$.
 Właściwości: Zaawansowane: Warunek wyświetlania: $p \neq 0 \wedge (q \neq 0)$.
 Kolory dynamiczne: Czerwony: r , Zielony: 0 , Niebieski: t .
 Tekst: pogrubiony.

25 ABC

Widok Grafiki 2. Wpisz tekst12: $g(x) = f(x-p)$.
 Właściwości: Zaawansowane: Warunek wyświetlania: $(p \neq 0) \wedge q \neq 0$.
 Kolory dynamiczne: Czerwony: r , Zielony: 0 , Niebieski: t .
 Tekst: pogrubiony.

26 ABC

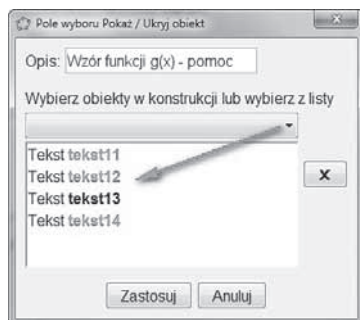
Widok Grafiki 2. Wpisz tekst13: $g(x) = f(x)$.
 Właściwości: Zaawansowane: Warunek wyświetlania: $p \neq 0 \wedge q \neq 0$.
 Kolory dynamiczne: Czerwony: r , Zielony: 0 , Niebieski: t .
 Tekst: pogrubiony.

27 ABC

Widok Grafiki 2. Wpisz tekst14: $g(x) = f(x - p) + q$.
Właściwości: Zaawansowane: Warunek wyświetlania: $(p \neq 0) \wedge (q \neq 0)$.
Kolory dynamiczne: Czerwony: r, Zielony: 0, Niebieski: t.
Tekst: pogrubiony.

28 

Widok Grafiki 2.
Wstaw pole wyboru „b” z Opisem: Wzór funkcji $g(x)$ – pomoc i połącz z tekst11, tekst12, tekst13, tekst14, wybierając z listy Obiekty.

29 

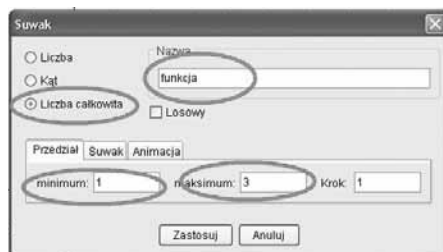
Widok Grafiki.
Wstaw pole wyboru „c” z Opisem: Wykres funkcji $g(x)$, połącz z funkcją g wybierając z listy Obiekty.

30

Rozmieść odpowiednio wszystkie elementy i osadź je.

3

Wstaw suwak o nazwie funkcja. Zaznacz Grafika 2.



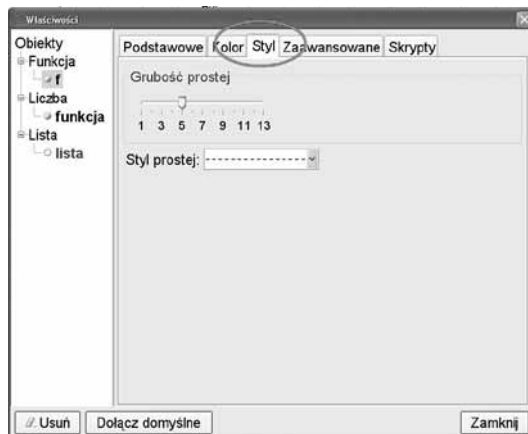
4

$$a = 2$$

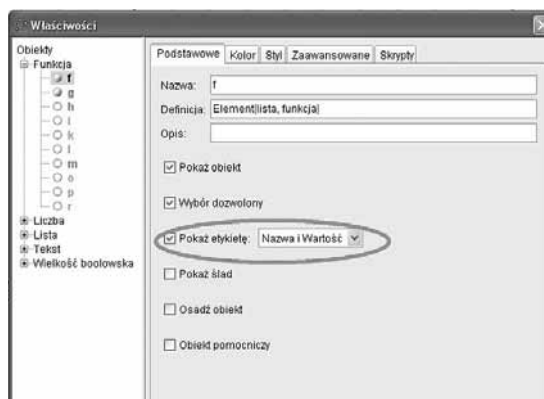
Wpisz w polu wprowadzania
(polecenie służy do wyboru funkcji z wcześniej utworzonej listy)

Wprowadź: `f=Element(lista,funkcja)`

We właściwościach wykresu – linia przerywana, grubość prostej 5.



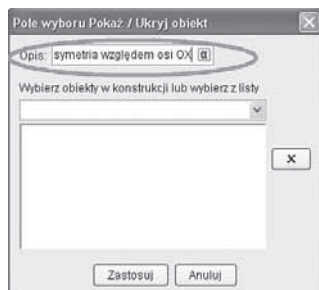
We właściwościach Podstawowe zaznacz Pokaż etykietę.



5



Wstaw pole wyboru.
Zaznacz Grafika 2.



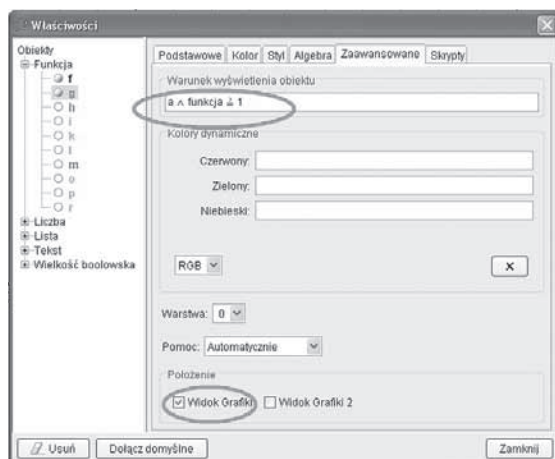
6

Wpisz w polu wprowadzania

Wprowadź: $g(x) = -\sin(x)$

7

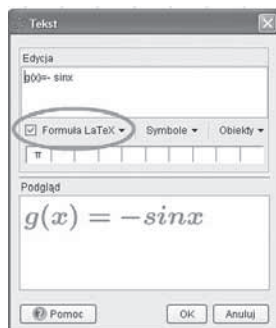
We właściwościach wykresu funkcji $g(x) = -\sin(x)$ zaznacz warunek wyświetlania, zaznacz Widok Grafiki i ustal kolor wykresu.



8

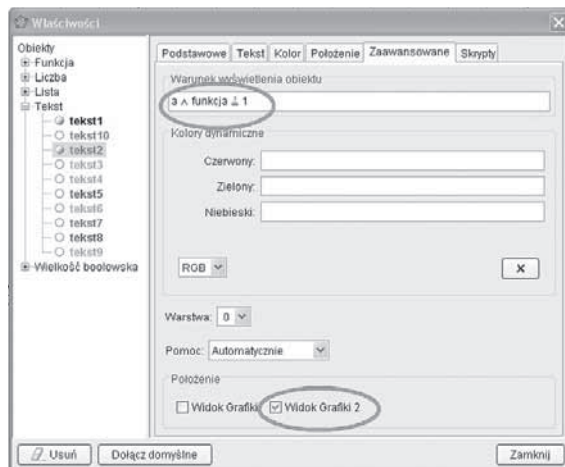
ABC

Wpisz tekst2: zaznacz Formuła LaTeX.



9

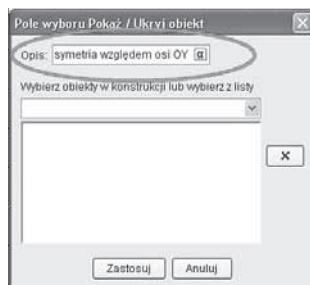
We właściwościach tekstu2 w zakładce Zaawansowane wpisz warunek wyświetlania obiektu. Ustaw kolor i wielkość tekstu2, zaznacz Grafika 2. Pamiętaj o ustawieniu tego samego koloru dla tekstu i odpowiedniego wykresu funkcji.



10



Wstaw pole wyboru. We właściwościach zaznacz Grafika 2.



11

Wpisz w polu wprowadzania

Wprowadź: $h(x) = \sin(-x)$

12

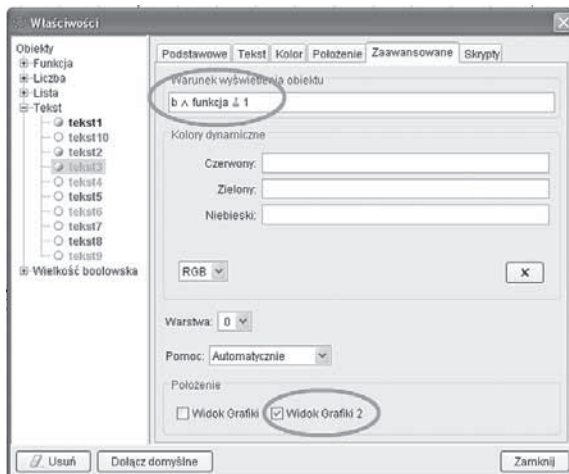
ABC

Wpisz tekst3:



12 ABC

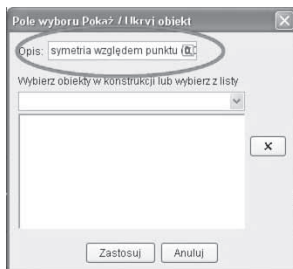
We właściwościach tekstu3 w zakładce Zaawansowane wpisz warunek wyświetlania obiektu. Zaznacz Grafika 2.



Pamiętaj o ustawieniu tego samego koloru dla tekstu i odpowiedniego wykresu funkcji.

13

Wstaw pole wyboru, ustaw opis: symetria względem punktu (0,0).



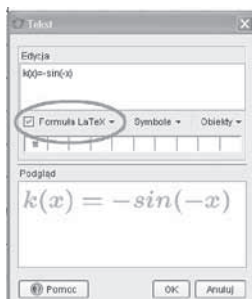
14

Wpisz w polu wprowadzania

Wprowadź: $k(x) = -\sin(-x)$

15 ABC

Wpisz tekst4, zaznacz formułę LaTeX.



*Dalsza część książki dostępna w wersji
pełnej.*

