# Hybrydowe modelowanie procesów demograficznych z wykorzystaniem rozmytych przełączających układów dynamicznych

Agnieszka Rossa
Lesław Socha
Andrzej Szymański

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

# Hybrydowe modelowanie procesów demograficznych z wykorzystaniem rozmytych przełączających układów dynamicznych

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

# Hybrydowe modelowanie procesów demograficznych z wykorzystaniem rozmytych przełączających układów dynamicznych

Agnieszka Rossa
Lesław Socha
Andrzej Szymański

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

ŁÓDŹ 2015

Agnieszka Rossa, Andrzej Szymański – Uniwersytet Łódzki
Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny, Zakład Demografii i Gerontologii Społecznej
90-214 Łódź, ul. Rewolucji 1095 r. nr 41/43

Lesław Socha – Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego
Wydział Matematyczno-Przyrodniczy – Szkoła Nauk Ścisłych, Instytut Informatyki
01-938 Warszawa, ul. Wóycickiego 1/3

RECENZENT
*Grażyna Trzpiot*

REDAKTOR INICJUJĄCY
*Iwona Gos*

REDAKTOR WYDAWNICTWA UŁ
*Bogusław Pielat*

SKŁAD I ŁAMANIE
*Agnieszka Rossa*

KOREKTA TECHNICZNA
*Leonora Wojciechowska*

PROJEKT OKŁADKI
*Stämpfli Polska Sp. z o.o.*
Zdjęcie wykorzystane na okładce: © Shutterstock.com

Wydrukowano z gotowych materiałów dostarczonych do Wydawnictwa UŁ



Wydane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
Wydanie I. W.07151.15.0.K

Ark. wyd. 11,8; ark. druk. 14,75

ISBN 978-83-8088-041-2
e-ISBN 978-83-8088-042-9

Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
90-131 Łódź, ul. Lindleya 8
www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. (42) 665 58 63

# Spis treści

# Wstęp

Umieralność i prawidłowości z nią związane są przedmiotem dociekań od wielu stuleci. Już z początku III wieku pochodzi tzw. tablica Ulpiana, opracowana dla celów fiskalnych przez rzymskiego prawnika Dominatiusa Ulpianusa. Tablica przedstawia wartości dalszego trwania życia obywateli Imperium Rzymskiego. Przekazy historyczne nie zawierają wzmianki o zastosowanej metodzie obliczeń i materiałach źródłowych, dlatego tablica Ulpiana ma głównie wartość historyczną (por. [93], s. 102–103).

Za ojca metodologii tablic wymieralności uznaje się J. Graunta, który w roku 1662 opublikował pracę *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality*. Przedstawił w niej porządek wymierania generacji mieszkańców Londynu w formie liczb osób dożywających wieku $6, 16, 26, \ldots, 86$ lat. Graunt oparł swoje analizy na rejestrach londyńskich parafii, nie precyzując jednak, jakiego okresu dotyczyły.

Kontynuatorem badań Graunta był angielski astronom E. Halley, który w artykule z roku 1693 *An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind Draws from Curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw* przedstawił tablice wymieralności dla populacji mieszkańców Wrocławia. Inne, wczesne prace na temat modeli umieralności pochodzą z wieku XIX (np. [40], [106]).

Autorem współczesnej metodologii budowy tablic wymieralności jest C. L. Chiang [25]. Obecnie tablice tego rodzaju określa się także mianem tablic trwania życia (*life tables*). W Polsce wspomnianego terminu zaczęto używać w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku.

Gwałtowny rozwój teorii i zastosowań modeli umieralności obserwujemy szczególnie w ostatnich czterech dekadach, o czym świadczą liczne opracowania monograficzne poruszające tę tematykę (np. [36], [38], [48], [57], [77], [91], [93], [105], [107]).

Opisywane w literaturze matematyczne modele umieralności można podzielić na dwie grupy [14], tj. na modele statyczne lub stacjonarne oraz modele dynamiczne. Pierwszą, najliczniejszą grupę stanowią modele, w których prawdopodobieństwa zgonów lub cząstkowe współczynniki zgonów są przedstawiane za pomocą funkcji zmiennej rzeczywistej lub zmiennej rozmytej z pewnymi, estymowanymi parametrami ([20], [21], [23], [24], [31], [41], [42], [43], [47], [59], [65], [88], [89], [90]). Drugą grupę tworzą modele dynamiczne, w których prawdopodobieństwa lub współczynniki zgonów wyrażane są m.in. w postaci rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych ([2], [9], [11], [13], [16], [17], [26], [27], [30], [37], [44], [45], [54], [69], [82], [92], [94], [96], [104], [112]). Popularny obecnie model Lee–Cartera [65], podobnie jak jego rozmyta wersja Koissi–Shapiro [59], należą do pierwszej grupy. Jednak niektóre uogólnienia modelu Lee–Cartera można zaliczyć również do grupy drugiej. Przykładem jest dynamiczny, hybrydowy model typu Lee–Cartera, zaproponowany w pracy A. Rossy i L. Sochy [92].

Modele dynamiczne opisane stochastycznymi równaniami różniczkowymi okazały się niewystarczające do opisu procesów demograficznych. Nie nadawały się one zwłaszcza do opisu zjawisk zmiennych w czasie ciągłym, z uwagi na odmienne zachowanie w różnych przedziałach czasowych. To skłoniło naukowców do zaproponowania nowego rodzaju modeli, zwanych hybrydowymi, w których występuje wzajemna interakcja między ciągłą i dyskretną dynamiką.

Wprowadzone modele hybrydowe lub przełączające [15] były uogólnieniem modeli z przekaźnikami, występujących w automatyce oraz modeli o zmiennej strukturze [56] opisujących zjawiska w mechanice, ekonomii lub w naukach empirycznych. Pojawiły się również prace, w których autorzy wprowadzili złożone modele, które można uznać za modele hybrydowe (np. [12], [13], [44], [92]).

W dalszych rozważaniach przez układ hybrydowy będziemy rozumieli pewną rodzinę modeli statycznych lub dynamicznych, które będą przełączane według jakiegoś prawa przełączeń. Dynamiczne modele będą opisane stochastycznymi równaniami różniczkowymi. Z uwagi na to, że tylko dla niewielkiej klasy równań można znaleźć ich rozwiązania analityczne i mają one dosyć złożoną budowę, zaproponujemy nową grupę modeli hybrydowych, zwanych momentowymi układami hybrydowymi. Idea tych modeli polega na zastąpieniu równań stochastycznych odpowiadającymi im równaniami różniczkowymi dla momentów.

Główną trudnością związaną z zastosowaniem popularnego obecnie stochastycznego modelu Lee–Cartera jest założenie o jednorodności składnika losowego, którego zwykle nie potwierdzają wyniki analiz empirycznych. Trudność ta skłania do poszukiwania rozwiązań, uchylających wspomniane założenie. Jedną z możliwości jest przeniesienie rozważań na grunt teorii liczb rozmytych.

Próbę taką podjęli M. C. Koissi i A. F. Shapiro [59], proponując tzw. rozmyty model Lee–Cartera. W ich modelu zarówno obserwacje empiryczne, jak i parametry modelu traktowane są w kategoriach liczb rozmytych, opisanych trójkątnymi, symetrycznymi funkcjami przynależności.

Model Koissi–Shapiro niesie jednak ze sobą trudności związane z estymacją parametrów, które wynikają z konieczności poszukiwania minimum funkcji zawierającej operator typu *maksimum*. Tego rodzaju zadania nie można rozwiązać za pomocą standardowych algorytmów optymalizacyjnych. Problem ten można jednak uprościć, wykorzystując algebrę skierowanych liczb rozmytych, opracowaną i opublikowaną przez W. Kosińskiego z zespołem [61], [62]. Efekty jej zastosowania w odniesieniu do modelu Koissi–Shapiro opublikowane zostały w monografii zbiorowej pod redakcją A. Rossy [91], a także w artykule A. Szymańskiego i A. Rossy [104].

Dalej idąca modyfikacja umożliwia zastąpienie algebry Banacha skierowanych liczb rozmytych przez algebrę Banacha $C^*$. Jej wykorzystanie pozwala odwołać się do twierdzenia Gelfanda–Mazura, wskazującego na izomorfizm izometryczny pomiędzy algebrą $C^*$ a algebrą Banacha funkcji zespolonych. W ten sposób problem optymalizacyjny może być przeniesiony na teren analizy zespolonej. Jest to według naszej najlepszej wiedzy nowatorskim podejściem do zagadnienia modelowania umieralności.

Struktura książki jest następująca. W rozdziale 1 zostały omówione podstawowe pojęcia i modele umieralności, zaczerpnięte z literatury. Rozdział 2 stanowi wprowadzenie w tematykę hybrydowych modeli dynamicznych. W rozdziale 3 przedstawione zostały dynamiczne, hybrydowe modele umieralności, w szczególności hybrydowy model Lee–Cartera oraz uogólniony model Milevskiego–Promislowa oraz ich wersje dyskretno-czasowe, służące do estymacji parametrów. W rozdziale 4 prezentowane są teoretyczne podstawy rozmytych modeli umieralności na gruncie algebry skierowanych liczb rozmytych, natomiast rozdział 5 zawiera kilka propozycji modeli umieralności będących uogólnieniem modelu rozmytego. Oparte są one na algebrze zmodyfikowanych liczb rozmytych oraz funkcji zespolonych. W ostatnim rozdziale zawarte zostały rezultaty estymacji i ewaluacji zaproponowanych modeli.

Autorzy dziękują prof. Grażynie Trzpiot za cenne uwagi i sugestie zawarte w recenzji wydawniczej niniejszej monografii. Książka skierowana jest do studentów, doktorantów i specjalistów z zakresu demografii, statystyki i ekonomii.

Publikacja została sfinansowana ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji nr DEC-2011/01/B/HS4/02882.

## Rozdział 1

# Modele umieralności

## 1.1. Wprowadzenie

Uznaje się, że umieralność jest relatywnie łatwa do modelowania i prognozowania. Jednak w długim horyzoncie prognozy, pod wpływem różnorodnych zaburzeń, mogą zachodzić nieregularne zmiany w przebiegu tego procesu. Przykładem może być kryzys zdrowotny w Polsce w latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych ubiegłego stulecia ([78]). Kluczową rolę odgrywa wówczas dobór adekwatnego modelu. Przedmiotem modelowania są zazwyczaj tablicowe mierniki umieralności, do których należą głównie cząstkowe współczynniki zgonów lub warunkowe prawdopodobieństwa zgonów. Na ich podstawie dokonuje się prognozowania innych wielkości, np. średniego czasu dalszego trwania życia.

## 1.2. Podstawowe tablicowe mierniki umieralności

Definicja cząstkowych (grupowych) współczynników zgonów odwołuje się do ogólnej definicji współczynnika demograficznego, rozumianego jako iloraz liczby zdarzeń demograficznych określonego rodzaju do łącznego czasu ekspozycji na ryzyko wystąpienia zdarzenia w rzeczywistej lub hipotetycznej kohorcie ([85], s. 5–32). Dalej przedstawiona zostanie definicja cząstkowych, kohortowych współczynników demograficznych, wyznaczanych dla ustalonej kohorty (generacji) osób. Definicje kohortowo-przekrojowych lub przekrojowych współczynników demograficznych znaleźć można w monografii [91], s. 229–231.

Załóżmy, że rozważamy pewną podzbiorowość jednostek, wyodrębnionych w danej kohorcie $s$. Oznaczmy tę podzbiorowość symbolem $x$. Zwykle indeks $x$ wskazuje na podpopulację jednostek (osób) wyodrębnionych ze względu na wiek, a dokładniej – będących w wieku $x$ ukończonych lat. W takim przypadku $x$ przybiera wartości ze zbioru $\{0, 1, \ldots, X\}$, gdzie $X$ jest górną granicą wieku.

Kohortowy, cząstkowy współczynnik demograficzny dla osób w wieku $x$ w kohorcie $s$ można oznaczyć symbolem $W_x^{(s)}$. W ogólnym przypadku, tj. dla grupy wieku $[x, x+n)$ ($n > 1, n \in \mathbf{N}$), bardziej adekwatnym jest oznaczenie ${}_nW_x^{(s)}$.

**Definicja 1.1.** Cząstkowym, kohortowym współczynnikiem demograficznym nazywamy iloraz liczby zdarzeń demograficznych $Z_x^{(s)}$ w $x$-tej podzbiorowości w kohorcie $s$, do łącznego czasu ekspozycji $K_x^{(s)}$ na ryzyko wystąpienia danego zdarzenia w tej podzbiorowości, czyli

$$W_x^{(s)} = \frac{Z_x^{(s)}}{K_x^{(s)}}\, C, \tag{1.2.1}$$

gdzie $C$ oznacza zadaną stałą (np. $C = 10\,000$).

Gdy analizowanymi zdarzeniami demograficznymi są zgony, wówczas lewą stronę (1.2.1) zwykło się oznaczać symbolem $m_x^{(s)}$, gdy $n = 1$ lub symbolem ${}_nm_x^{(s)}$, gdy $n > 1$.

Ważnymi miernikami w analizie demograficznej, poza współczynnikami cząstkowymi, są prawdopodobieństwa warunkowe.

**Definicja 1.2.** Warunkowe, kohortowe prawdopodobieństwo zdarzeń demograficznych jest ilorazem liczby zdarzeń $Z_x^{(s)}$ zaobserwowanych w $s$-tej kohorcie osób będących w wieku $x$ ukończonych lat, do liczby $L_x^{(s)}$ osób dożywających wieku $x$, czyli

$$q_x^{(s)} = \frac{Z_x^{(s)}}{L_x^{(s)}}. \tag{1.2.2}$$

W przypadku, gdy rozważamy przedział wieku $[x, x+n)$, dla $n > 1$, wówczas warunkowe, kohortowe przzwdopodobieństwo zdarzeń demograficznych oznaczamy symbolem ${}_nq_x^{(s)}$. Dalej, dla uproszczenia notacji, pominięty zostanie symbol $(s)$, oznaczający kohortę.

## 1.3. Związek kohortowych współczynników zgonów i prawdopodobieństw zgonów

Niech ${}_nZ_x$ oraz ${}_nK_x$ oznaczają odpowiednio liczbę zgonów i czas ekspozycji na ryzyko zgonu w danej kohorcie osób, będących w grupie wieku $[x, x+n)$ lat.