Andrzej Indrzejczak, Marek Nowak

METODY LOGIKI
Dedukcja

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

METODY LOGIKI

Dedukcja

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

Andrzej Indrzejczak, Marek Nowak

METODY LOGIKI
Dedukcja

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO
Łódź 2016

Andrzej Indrzejczak, Marek Nowak – Uniwersytet Łódzki
Wydział Filozoficzno-Historyczny, Katedra Logiki i Metodologii Nauk
90-131 Łódź, ul. Lindleya 3/5

RECENZENT
Dariusz Surowik

REDAKTOR INICJUJĄCY
Damian Rusek

SKŁAD I ŁAMANIE
Andrzej Indrzejczak, Marek Nowak

PROJEKT OKŁADKI
Katarzyna Turkowska

Zdjęcie wykorzystane na okładce: © Depositphotos.com/silvercircle

Wydrukowano z gotowych materiałów dostarczonych do Wydawnictwa UŁ

Wydane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
Wydanie I. W.07671.16.0.K

Ark. druk. 9,0

ISBN 978-83-8088-359-8
e-ISBN 978-83-8088-360-4

Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
90-131 Łódź, ul. Lindleya 8
www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. (42) 665 58 63

Spis treści

Wstęp

Logika współczesna dostarcza formalnych narzędzi umożliwiających precyzyjną analizę poprawności rozumowań. Najważniejszym sposobem uzasadniania głoszonych twierdzeń jest bez wątpienia dowód. Na gruncie logiki wypracowano wiele typów systemów dowodzenia takich jak systemy aksjomatyczne, systemy rezolucji, systemy sekwentowe czy systemy dedukcji naturalnej. Te ostatnie zostały zaproponowane jako najbardziej zbliżone do faktycznej praktyki dowodzenia stosowanej przede wszystkim przez matematyków. W prezentowanym opracowaniu skupimy się na opisie struktury i zastosowań ostatniego z wymienionych sposobów kodyfikacji dowodzenia. W rozdziale pierwszym zaprezentujemy jedno z jego możliwych realizacji w odniesieniu do logiki klasycznej. Dowody i dedukcje będą tutaj prezentowane w czysto formalny sposób. Prezentację dedukcji naturalnej poprzedzimy krótkim omówieniem aksjomatycznej formalizacji klasycznego rachunku zdań. W drugim rozdziale zaprezentowane zostaną dwie teorie aksjomatyczne: arytmetyka liczb naturalnych w ujęciu Peano i obszerny fragment teorii mnogości w ujęciu Zermelo i Fraenkela. Dowody twierdzeń w tych teoriach zostaną przedstawione skrótowo, w sposób niesformalizowany ale na tyle dokładny, że można je „przepisać” jako w pełni formalne dowody w systemie dedukcji naturalnej z części pierwszej, wzbogaconym o aksjomaty rozważanych teorii. Takie rozwiązanie pokazuje nam w naturalny sposób związek dedukcji naturalnej z faktycznie prezentowanymi szkicami dowodów w literaturze matematycznej a ponadto jest ekonomiczne, gdyż formalne dowody ważnych twierdzeń są zwykle bardzo długie.

Zanim przejdziemy do charakterystyki dedukcji naturalnej wypada poświęcić nieco uwagi historii zagadnienia. Dowody, często całkiem zadowalające z punktu widzenia stosowanych obecnie kryteriów, konstruowali już matematycy greccy z kręgu szkoły pitagorejskiej działający w VI–V w. p.n.e. Wypracowali oni wiele reguł i technik, które należą do wypróbowanego repertuaru środków dowodzenia stosowanego współcześnie. Należą do nich np.

takie środki dowodzenia jak dowód warunkowy, dowód nie wprost, dowodzenie z alternatywy, czy reguły wnioskowania takie jak modus ponendo ponens, modus tollendo tollens, modus ponendo tollens[1]. W rozdziale 1 objaśnimy działanie wszystkich wymienionych wyżej technik dowodzenia.

Intuicyjne stosowanie środków dowodzenia należy jednak odróżnić od świadomej refleksji nad ich prawomocnością. Ta pojawiła się nieco później w pismach logicznych Arystotelesa (384–322 p.n.e.), który wprowadził pojęcie dedukcji jako niezawodnego sposobu rozumowania gwarantującego, że ze zdań prawdziwych, przyjętych jako przesłanki rozumowania, wywnioskujemy jedynie prawdziwe wnioski. Dokonał on również pierwszej próby kodyfikacji logiki nazw, która systematyzowała pewną klasę sposobów rozumowania. Sylogistyka, czyli rachunek nazw Arystotelesa, stanowiła wprawdzie podstawę nauczania logiki aż do wieku XX, jednak jej zakres zastosowań był zbyt wąski, zwłaszcza z punktu widzenia potrzeb matematyki. Alternatywne próby kodyfikacji zasad rozumowania, prowadzące do konstrukcji logiki zdań, podejmowali filozofowie stoiccy, jednak wiedza, którą dysponujemy na temat ich dokonań jest bardzo fragmentaryczna.

U Arystotelesa pojawia się też refleksja nad budową systemów aksjomatycznych jako sposobów systematyzowania wiedzy z danej dziedziny. W systemie aksjomatycznym ustala się pewną, zazwyczaj niewielką, ilość pojęć pierwotnych dla danej teorii, oraz zestaw aksjomatów, które są twierdzeniami przyjętymi bez dowodu, zazwyczaj uznawanymi za intuicyjnie oczywiste. System rozbudowuje się w sensie pojęciowym przez dołączanie definicji nowych pojęć oraz w sensie merytorycznym przez dołączanie nowych twierdzeń udowodnionych na podstawie aksjomatów i wcześniej udowodnionych twierdzeń. Tym samym systemy aksjomatyczne można uznać za najstarszą formę systemów dowodzenia, chociaż niektórzy badacze (np. Corcoran [6]) twierdzą, że stoicy prezentowali swoją logikę zdań w postaci systemu dedukcji naturalnej. Nie ulega wątpliwości, że pierwszy dojrzały system aksjomatyczny obejmujący całość ówczesnej matematyki został zaprezentowany w „Elementach” Euklidesa. Praca ta przez ponad dwa tysiąclecia stanowiła wzór stosowania systemów aksjomatycznych, inspirując wielu myślicieli (np. Kartezjusza (1596–1647)) do przenoszenia tych zasad poza matematykę.

Jednak starożytne rozumienie systemu aksjomatycznego, z punktu widzenia dzisiejszych wymagań, pozostawiało sporo do życzenia. Jeżeli chodzi o prezentację podstawy systemu, to była ona zazwyczaj podawana w sposób dość intuicyjny. Jeżeli chodzi o sposób rozbudowy systemu, to nie określono

[1]Nazwy są późniejsze, łacińskie.

precyzyjnie ani zasad definiowania ani dostępnego zakresu sposobów dowodzenia i samej konstrukcji dowodu. Problemy te podjęte zostały dopiero pod koniec XIX wieku przez niemieckiego matematyka Gottloba Fregego, „ojca" współczesnej logiki matematycznej, a doprecyzowane ostatecznie w tzw. szkole Dawida Hilberta. Współcześnie systemy dowodzenia, w szczególności aksjomatyczne, prezentuje się w postaci całkowicie sformalizowanej, tzn. jako konstrukcje podane w języku sztucznym i spełniające określone warunki poprawności. W konstrukcji systemu aksjomatycznego przestano przywiązywać wagę do takich tradycyjnie formułowanych postulatów jak „oczywistość" aksjomatów; kłopoty z paradoksami w podstawach matematyki, uzyskanymi na podstawie – jak się wydawało – zupełnie oczywistych założeń, uczyniły takie wymagania bezużytecznymi. Bardziej podstawowym wymogiem stała się niesprzeczność zbioru aksjomatów, czyli niemożność wydedukowania z nich jakiegoś zdania i jego zaprzeczenia. Ryzyko takie wiąże się jednak nie tylko z kwestią doboru aksjomatów; do sprzeczności może też doprowadzić niefrasobliwy sposób definiowania lub stosowanie niepoprawnych reguł wnioskowania. Stąd we współczesnej teorii systemów formalnych do tych kwestii przywiązuje się bardzo dużą wagę.

Zasady budowy i stosowania sformalizowanego systemu aksjomatycznego zilustrujemy na przykładzie konstrukcji (jednego z wielu możliwych) systemów aksjomatycznych Klasycznego Rachunku Zdań (KRZ). Ukazuje on na bardzo prostym przykładzie ogólne własności charakterystyczne systemów aksjomatycznych – „bogatych" w aksjomaty a „ubogich" w reguły. Dwa dalsze przykłady teorii aksjomatycznych zostaną zaprezentowane w rozdziale drugim. Rozdział 1 został przygotowany przez Andrzeja Indrzejczaka a rozdział 2 przez Marka Nowaka.

Rozdział 1

Dowodzenie w logice klasycznej

1.1 Klasyczny rachunek zdań

Logika klasyczna często jest dzielona na dwie składowe: klasyczny rachunek zdań (KRZ) i klasyczny rachunek kwantyfikatorów (KRK). Prezentacja taka ma swe uzasadnienie zarówno dydaktyczne jak i merytoryczne. KRZ jest łatwiejszy do omównienia a ponadto posiada pewne pożyteczne własności (np. rozstrzygalność), których KRK nie posiada. KRZ jest systemem prostszym, gdyż ogranicza się do analizy takich związków logicznych, które zależą tylko od występowania pewnego typu spójników. W związku z tym zarówno język KRZ jak i jego semantyka (której tutaj nie omawiamy) są bardzo proste. Niezależnie od swojej prostoty KRZ okazuje się narzędziem wystarczającym nawet do realizacji bardzo wymagających zadań, a jego struktura jest wystarczająco bogata aby umożliwić prezentację rozmaitych technik dedukcji.

1.1.1 Język KRZ

Formalny język dowolnej logiki lub pozalogicznej teorii ustalamy przez scharakteryzowanie jego słownika i reguł składniowych. Jest to czysto syntaktyczne ujęcie, w którym nie odwołujemy się do żadnego pojęcia semantycznej interpretacji. W obrębie słownika ustala się jakie występują w nim kategorie wyrażeń zmiennych i stałych. Zmienne nie mają ustalonego znaczenia a jedynie ustalony zakres możliwych podstawień, np. zmienne nazwowe to symbole, które mogą reprezentować dowolne wyrażenia nazwowe (można za nie podstawiać dowolne nazwy). Wyrażenia stałe to takie, których znaczenie jest precyzowane na gruncie danego systemu, np. w aksjomatach lub regułach dowodzenia. Stałe dzielimy na logiczne i pozalogiczne, te ostatnie występują tylko w językach formalnych teorii (aksjomatycznych). Opisu języka dokonujemy w metajęzyku, który jest zazwyczaj mieszanką (pewnej części) języka naturalnego i dodatkowych symboli tzw. metazmiennych. W dalszym ciągu jako symboli metazmiennych będziemy używać liter greckich, a jako symboli zmiennych liter łacińskich. Odróżnienie (sztucznego) języka danej logiki czy teorii, zwanego też językiem przedmiotowym, od metajęzyka używanego do jego opisu jest gwarantem uniknięcia problemów takich jak np. paradoks kłamcy, wynikających z samozwrotności języków naturalnych. Użycie metajęzyka, a konkretnie metazmiennych, pozwala też uzyskać niezbędny poziom ogólności w omawianiu reguł i systemów dowodzenia, np. stwierdzać coś o dowolnym zdaniu, bez względu na jego formę.

Język KRZ jest bardzo prosty. Przyjmujemy w nim tylko jeden nieskończony, przeliczalny zbiór zmiennych zdaniowych ZZ. Będą one reprezentowane przez litery $p, q, r, s, ..., p_1, q_1, ..., p_2, ...$ Zmienne tego typu mają za zadanie reprezentować dowolne zdania oznajmujące. Jedyne (pierwotne) stałe tego języka to spójniki oznaczane symbolami: $\neg$ (negacja), $\wedge$ (koniunkcja), $\vee$ (alternatywa), $\rightarrow$ (implikacja). Pierwszy z nich jest jednoargumentowy, tzn. łączy się z jednym zdaniem jako swym argumentem, powstałe w ten sposób zdanie nazywamy również negacją. Pozostałe są dwuargumentowe, tzn. łączą ze sobą dwa zdania jako swoje argumenty. Intuicyjnie, negacja odpowiada wyrażeniu „nieprawda, że”, koniunkcja – „i”, alternatywa – „lub”, a implikacja – „jeżeli ... to”. Należy jednak pamiętać, że chodzi tu jedynie o przybliżoną charakterystykę; podane zwroty w języku polskim są bowiem wieloznaczne[1], natomiast odpowiednie spójniki języka KRZ mają w nim precyzyjnie określone znaczenie. W metajęzyku będziemy używać małych liter greckich $\varphi, \psi, \chi, ...$ na oznaczenie dowolnych zdań (formuł) języka KRZ; a ich zbiory oznaczymy za pomocą wielkich liter $\Gamma, \Delta, \Pi, ...$ Możemy teraz podać kluczową definicję zdania albo formuły[2] w tym języku.

Definicja 1.1 (Zbiór formuł KRZ) *FOR jest najmniejszym zbiorem spełniającym warunki:*

1. $ZZ \subset FOR$
2. *jeżeli* $\varphi \in FOR$, *to* $\neg\varphi \in FOR$
3. *jeżeli* $\varphi, \psi \in FOR$, *to* $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi) \in FOR$

[1]Obszerną dyskusję na ten temat znaleźć można w Indrzejczak [12].

[2]W przypadku KRZ te dwa określenia mają takie samo znaczenie; rozróżnimy je w przypadku języka rachunku kwantyfikatorów.

W przypadku implikacji pierwszy (lewy) argument nazywamy poprzednikiem, a drugi następnikiem implikacji.

Podana definicja jest standardową definicją rekurencyjną, co umożliwia stosowanie w odniesieniu do danego systemu tzw. dowodów indukcyjnych przez tzw. indukcję strukturalną lub przy wykorzystaniu miar takich, jak długość (ilość wszystkich symboli) lub złożoność (ilość stałych logicznych) formuły.

W definicji użyliśmy dodatkowo nawiasów jako środków interpunkcyjnych. Są one często wymieniane w opisie słownika jako dodatkowa kategoria tzw. symboli pomocniczych. Można ich uniknąć stosując tzw. notację polską wprowadzoną przez Jana Łukasiewicza. Aby uprościć zapis zastosujemy konwencję pomijania zbędnych nawiasów, w szczególności zewnętrznych. Aby jeszcze bardziej zredukować ich liczbę stosujemy konwencję odnośnie siły wiązania spójników, wg. kolejności $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$. Dodatkowo omijać będziemy wewnętrzne nawiasy w przypadku wielokrotnego powtórzenia operacji łącznych, tj. koniunkcji i alternatywy. Konwencje te pozwalają formułę:

$$((p \vee (\neg q \wedge r)) \rightarrow ((p \wedge \neg s) \vee (q \wedge (s \wedge t))))$$

zapisać następująco:

$$p \vee \neg q \wedge r \rightarrow p \wedge \neg s \vee q \wedge s \wedge t$$

Celowo ograniczyliśmy zasób spójników będących pierwotnymi stałymi języka, pozwala to bowiem zredukować ilość aksjomatów. Można jednak dołączyć już teraz dodatkowe stałe za pomocą definicji. Będziemy używać symboli $\leftrightarrow$, $\perp$ i $\top$ (dwuargumentowy spójnik równoważności, stałe zdaniowe falsum i verum) jako definicyjnych skrótów:

- $(\varphi \leftrightarrow \psi) := ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$
- $\perp := (p \wedge \neg p)$; $\top := \neg\perp$

W przypadkach użycia $\leftrightarrow$ przyjmujemy, że siła wiązania tego spójnika jest jeszcze słabsza niż pozostałych spójników dwuargumentowych, czyli tam gdzie nawiasy nie wskazują inaczej traktujemy $\leftrightarrow$ jako główny spójnik wyrażenia.