

Tomasz RADOŹYCKI

ROZWIĄZUJEMY ZADANIA Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ

CZĘŚĆ I



Tomasz Radożycki

Rozwiązujemy zadania z analizy matematycznej

Część 1

dr hab. Tomasz Radożycki, prof. UKSW

Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Szkoła Nauk Ścisłych
Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego,
ul. Wóycickiego 1/3, 01-938 Warszawa

Redakcja naukowa recenzja: dr hab. Jerzy Jacek Wojtkiewicz

Korekta językowa: Elżbieta Kot

Skład komputerowy: Tomasz Radożycki

Projekt okładki: Bożena Świder

© Copyright by Wydawnictwo Oświatowe FOSZE

Rzeszów 2014

Wydanie II poprawione

ISBN 978-83-7586-099-3

Wydawnictwo Oświatowe FOSZE

35-021 Rzeszów, ul. W. Pola 6

tel. 17 863 34 35

e-mail: fosze@fosze.com.pl

www.fosze.com.pl

Spis treści

Przedmowa	7
Oznaczenia	9
1 Badamy zbiory i relacje	11
1.1 Wykazujemy proste tożsamości	11
1.2 Znajdujemy zbiory na płaszczyźnie	21
1.3 Znajdujemy kresy zbiorów liczbowych	26
1.4 Sprawdzamy, czy $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności, szukamy klas abstrakcji i sporządzamy wykres	30
1.5 Zadania do pracy własnej	37
2 Badamy podstawowe własności funkcji	39
2.1 Szukamy zbioru wartości i poziomicy	39
2.2 Sprawdzamy, czy funkcja jest injekcją, surjekcją lub bijekcją, oraz szukamy odwzorowań odwrotnych	45
2.3 Znajdujemy obrazy i przeciwobrazy zbiorów	52
2.4 Zadania do pracy własnej	56
3 Definiujemy odległość w zbiorach	58
3.1 Badamy, czy podana funkcja jest metryką	58
3.2 Rysujemy kulę i odcinek	62
3.3 Zadania do pracy własnej	69
4 Wykorzystujemy indukcję matematyczną	70
4.1 Dowodzimy podzielności liczb i wielomianów	70

4.2	Wykazujemy równania i nierówności	74
4.3	Dowodzimy kilku ważnych wzorów	82
4.4	Zadania do pracy własnej	93
5	Badamy zbieżność i szukamy granic ciągów	94
5.1	Kilka typowych „chwytów” przydatnych przy obliczaniu granic ciągów	94
5.2	Wykorzystujemy różne kryteria	105
5.3	Badamy ciąg rekurencyjny	117
5.4	Gdy ciąg oscyluje	123
5.5	Dowodzimy rozbieżności ciągu	129
5.6	Zadania do pracy własnej	133
6	Zbiory otwarte, domknięte, zwarte	135
6.1	Badamy otwartość i domkniętość	135
6.2	Badamy zwartość	142
6.3	Zadania do pracy własnej	145
7	Znajdujemy granice funkcji	146
7.1	Kilka typowych „chwytów” stosowanych przy obliczaniu granic funkcji	146
7.2	Stosujemy podstawienia	153
7.3	Zadania do pracy własnej	159
8	Badamy ciągłość i jednostajną ciągłość funkcji	161
8.1	Wykazujemy ciągłość funkcji metodami Heinego i Cauchy’ego	161
8.2	Badamy funkcję w punktach „sklejenia”	166
8.3	Badamy, czy funkcja jest jednostajnie ciągła	177
8.4	Zadania do pracy własnej	182
9	Funkcje różniczkowalne	184
9.1	Obliczamy pochodną funkcji z definicji	184
9.2	Badamy różniczkowalność funkcji	187
9.3	Zadania do pracy własnej	192
10	Różniczkujemy funkcje	194
10.1	Znajdujemy pochodną funkcji odwrotnej	194
10.2	Rozwiązujemy kilka złożonych problemów	198
10.3	Zadania do pracy własnej	202

11 Wykorzystujemy pochodną do badania niektórych własności funkcji	203
11.1 Wykazujemy tożsamości i nierówności	203
11.2 Korzystamy z twierdzeń Rolle’a i Lagrange’a	210
11.3 Badamy krzywe na płaszczyźnie — styczność, kąty przecięcia	214
11.4 Obliczamy granice metodą de l’Hospitla	222
11.5 Zadania do pracy własnej	231
12 Wyższe pochodne i wzór Taylora	233
12.1 Wykazujemy formuły na pochodne wyższych rzędów metodą indukcji	233
12.2 Rozwijamy funkcje	239
12.3 Wykorzystujemy wzór Taylora do obliczania granic funkcji	245
12.4 Zadania do pracy własnej	250
13 Szukamy ekstremów i badamy przebieg funkcji	251
13.1 Znajdujemy najmniejszą i największą wartość funkcji na danym zbiorze	251
13.2 Badamy funkcję od A do Z	256
13.3 Zadania do pracy własnej	266
14 Badamy zbieżność szeregów	267
14.1 Stosujemy oszacowania	267
14.2 Wykorzystujemy różne kryteria	272
14.3 Rozwiązujemy kilka ciekawych problemów	286
14.4 Zadania do pracy własnej	292
15 Obliczamy całki nieoznaczone	294
15.1 Całkujemy przez części i przez podstawienie	294
15.2 Stosujemy metodę wzorów rekurencyjnych	307
15.3 Całkujemy funkcje wymierne	313
15.4 Całkujemy funkcje wymierne od funkcji trygonometrycznych	318
15.5 Wykorzystujemy podstawienia Eulera	322
15.6 Wykorzystujemy podstawienia hiperboliczne i trygonometryczne	328
15.7 Zadania do pracy własnej	332

16 Zbieżność ciągów i szeregów funkcyjnych	334
16.1 Znajdujemy granicę ciągu funkcji	334
16.2 Badamy zbieżność jednostajną ciągu funkcji	338
16.3 Badamy zbieżność jednostajną szeregu funkcji	344
16.4 Znajdujemy sumy szeregów	349
16.5 Zadania do pracy własnej	355

Przedmowa

Niniejszy zbiór zadań planowany jest jako pierwsza część z serii trzech obejmujących całość zagadnień z analizy matematycznej, z jakimi studenci nauk ścisłych spotykają się w ramach początkowych dwóch lub trzech semestrów zajęć. Powstał on na podstawie moich doświadczeń z okresu kilkunastu lat prowadzenia zajęć dydaktycznych z tego niełatwego przedmiotu na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. Dla niektórych zadań inspirację stanowiły materiały dydaktyczne, jakimi od dawna posługują się pracownicy Katedry Metod Matematycznych Fizyki. W zamyśle zbiór ten ma być odmienny od innych dostępnych na rynku i powinien stanowić dla nich uzupełnienie. Podstawowym jego założeniem jest, aby wszystkie zamieszczone problemy (poza tymi, które są przeznaczone do pracy własnej) były w pełni oraz szczególnie — nawet na kilku stronach — rozwiązane, aby żadne zagadnienie nie pozostało niewyjaśnione, a żadne pytanie, jakie mogłoby nasunąć się Czytelnikowi podczas analizowania rozwiązania, nie pozostało bez odpowiedzi. Zdaję sobie sprawę, że zamiar ten powiódł się co najwyżej w części. Sprawiłoby mi jednak dużą satysfakcję, gdyby student po uważnym prześledzeniu konkretnego zadania uznał, że rozumie dane zagadnienie w stopniu zbliżonym do tego, jaki wyniósłby z ćwiczeń rachunkowych na uczelni. Z tego względu sporo miejsca zostało w książce poświęcone na drobne przedstawienie każdego rozumowania czy szczegółowe — dla niektórych zapewne nawet zbyt elementarne — przekształcenia wzorów.

Taki profil książki pociąga jednak za sobą pewne ograniczenia. Przede wszystkim nie można w niej umieścić zbyt wielu zadań, aby nadmiernie się nie rozrosła. Z tego samego powodu nie ma też w niej miejsca na teoretyczne

wprowadzenia, jakie zwyczajowo znajdują się na początku każdego rozdziału typowego zbioru zadań. Zmuszony byłem przyjąć, że student zna teoretyczną stronę zagadnień ze swojego wykładu bądź dysponuje dobrym podręcznikiem do analizy matematycznej, jakich jest wiele na rynku. Ze względu na ograniczone rozmiary tej książki zamieszczanie teoretycznych podrozdziałów musiałoby skutkować ograniczeniami w tych jej częściach, które, moim zdaniem, są w niej najważniejsze i które stanowiły główny cel jej opracowania. Zatem niektóre definicje czy twierdzenia, i to tylko wtedy, gdy ich przypomnienie jest naprawdę niezbędne, włączone zostały do rozwiązań konkretnych zadań, w których są bezpośrednio stosowane. Moja praktyka dydaktyczna wskazuje, że taki układ jest przez studentów chętniej akceptowany, gdyż, zamiast studiować kilka stron teoretycznych i abstrakcyjnych rozważań, otrzymują natychmiast zastosowanie danego twierdzenia czy definicji.

Z tym wiąże się też kwestia języka używanego w niniejszej książce. Starałem się go maksymalnie uprościć i — w miejsce terminów abstrakcyjnych — używać pojęć intuicyjnie jasnych (a nawet potocznych!), choć ktoś może, i słusznie, sformułować zarzut, iż nie są one wystarczająco precyzyjne. Jednakże celem moim było takie przedstawianie zagadnień, aby student bez większego wysiłku umiał przełożyć trudne pojęcia na konkrety, które są o wiele łatwiej zrozumiałe i przyswajalne. To także obserwacja z wielu lat pracy na uczelni. Zrozumienie tematu przez odbiorców zależy w dużej mierze od doboru odpowiednio prostego języka, zwłaszcza na pierwszych latach studiów. Na podniesienie poziomu abstrakcji na pewno znajdzie się czas w dalszym toku kształcenia. Na początku studiów dobrze jest uzmysłowić słuchaczom, że wiele nowych pojęć czy twierdzeń może być przez nich opanowanych już na gruncie dotychczasowej ich wiedzy i wyrobionej intuicji.

Licząc, że niniejsza pozycja przyczyni się choć w niewielkim stopniu do lepszego zrozumienia (od strony praktycznej) niektórych zagadnień analizy, zachęcam jednocześnie do korzystania z innych zbiorów zadań, które dostarczą materiału do własnej pracy, a których ta książka na pewno nie zastąpi.

Na koniec chciałbym podkreślić, że wszelkie uwagi, które pomogłyby w ulepszeniu tego zbioru, w usunięciu zauważonych błędów, w rozszerzeniu objaśnień, które zdaniem Czytelnika okazały się jednak zbyt skąpe bądź niejasne, czy włączeniu do rozwiązań zagadnień pominiętych, a wiążących się bezpośrednio z rozważanymi problemami, będą dla mnie bardzo cenne¹.

Tomasz Radożycki

¹E-mail: ksiazkimf@gmail.com

Oznaczenia

Poniżej zamieszczamy używane w zbiorze oznaczenia i konwencje, aby uniknąć ich powtarzania w każdym rozdziale, w którym będą one stosowane.

- Liczby całkowite dodatnie (bez zera) oznaczamy symbolem $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\},$$

i nazywać będziemy „naturalnymi”. Jeśli zależeć nam będzie na właściwym zera do tego zbioru, to napiszemy po prostu $\mathbb{N} \cup \{0\}$, a liczby te nazwiemy „naturalnymi z zerem”.

- Zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, wymiernych dodatnich czy całkowitych dodatnich oznaczać będziemy odpowiednio symbolami $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Q}_+$ oraz $\mathbb{Z}_+$. Zachodzi naturalnie $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$. Analogicznie symbole $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{Q}_-$ i $\mathbb{Z}_-$ odnoszą się będą do liczb ujemnych.
- Jeśli w konkretnym zadaniu nie są wprowadzone inne oznaczenia, to symbolem X oznaczać będziemy całą przestrzeń.
- We wszystkich zadaniach, poza tymi zawartymi w rozdziale 3 oraz ostatnim z podrozdziału 6.1, używamy jako domyślnej metryki euklidesowej opartej na twierdzeniu Pitagorasa, która szczegółowo omówiona jest w zadaniu 1 podrozdziału 3.1. W przypadku zbioru $\mathbb{R}$ redukuje się ona do „metryki naturalnej”, a więc takiej, w której odległość dwóch liczb x i y dana jest wzorem $d(x, y) = |x - y|$.
- Przyjmujemy, że kula jest otwarta. Przykładowo kula o środku w pewnym punkcie x_0 i promieniu r to zbiór punktów x spełniających warunek: $d(x_0, x) < r$. Jeśli w jakimś zadaniu potrzebna nam będzie kula domknięta, to napiszemy to w sposób jawny.

- Funkcja f jako odwzorowanie zbioru X w zbiór Y wymaga, formalnie rzecz biorąc, oprócz przepisu przyporządkowania (np. wzoru na $f(x)$) podania także samych zbiorów X i Y . Przyjmujemy zasadę, że jeśli w tekście zadania nie są one ustalone, to przez dziedzinę funkcji rozumiemy maksymalnie obszerny zbiór, dla którego wzór funkcji ma sens. Z kontekstu omawianych zagadnień wynika zawsze, co rozumiemy przez to sformułowanie. Przykładowo w podręczniku, w którym mowa jest wyłącznie o funkcjach rzeczywistych, na pewno nie będziemy rozszerzać dziedziny funkcji logarytm na płaszczyznę zespoloną. Podobnie, jeśli nie jest podany zbiór Y , to domyślnie uważać go będziemy za tożsamy ze zbiorem wartości funkcji f .
- Dziedzinę funkcji oznaczać będziemy na ogół symbolem D .
- Poziomice (warstwy) funkcji f zdefiniowane jako zbiory

$$\{x \in D \mid f(x) = h\} ,$$

gdzie $h \in Y$, oznaczać będziemy symbolem D_h . Równoważnie można także napisać: $D_h = f^{-1}(\{h\})$.

- Przez pojęcie „funkcja rosnąca” rozumiemy funkcję liczbową spełniającą

$$\forall_{x_1, x_2 \in D} \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) .$$

Podobnie z „funkcją malejącą” będziemy mieć do czynienia, gdy

$$\forall_{x_1, x_2 \in D} \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2) .$$

Jeśli spełnione są jedynie warunki $f(x_1) \leq f(x_2)$ lub $f(x_1) \geq f(x_2)$, to będziemy mówić o „funkcji niemalejącej” lub „nierosnącej”.

- Symbol $\log$ oznaczać będzie logarytm naturalny: $\log x = \log_e x$.
- Symboli $:=$ lub $=$: używać będziemy wszędzie tam, gdzie dana równość ma charakter definicji bądź wprowadzenia nowego oznaczenia i pragniemy to szczególnie podkreślić.
- Klasy równoważności (abstrakcji) elementu x w relacji $\mathcal{R}$ oznaczmy symbolem $[x]_{\mathcal{R}}$.
- Symbolu $\simeq$ używać będziemy jako skrótowego zapisu oznaczającego „zachowuje się jak”. Jeśli na przykład napiszemy, że dla bardzo dużych x $a(x) \simeq b(x)$, to będziemy przez to rozumieć, iż

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1 .$$

Badamy zbiory i relacje

1.1 Wykazujemy proste tożsamości

Problem 1

Wykażemy, że

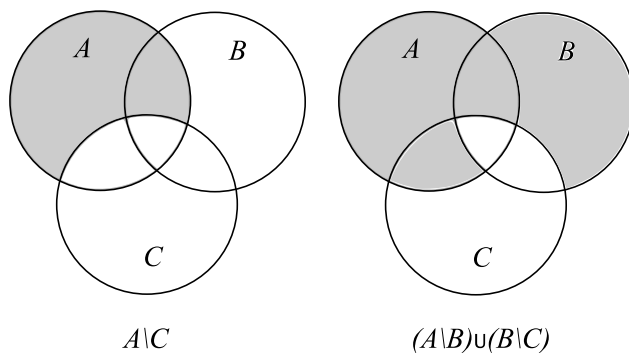
$$A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C), \quad (1.1.1)$$

gdzie A, B, C są zbiorami.

Rozwiązanie

Rozwiązywanie zadań z rachunku zbiorów, podobnych do rozpatrywanego poniżej, warto rozpocząć od wykonania rysunku, który pozwoli nam łatwiej wyobrazić sobie, czego chcemy dowieść. Czasami też rysunek taki może nawet uchronić nas przed bezskutecznym dowodzeniem nieprawdziwej tezy. Na rysunku 1.1 przedstawiliśmy w postaci kół trzy zbiory A , B oraz C w pewnej szczególnej konfiguracji. Po lewej stronie zaznaczony został szarym kolorem zbiór $A \setminus C$, a po prawej $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$. Z rysunku wynika, że w istocie zachodzi inkluzja podana w treści zadania.

Przedstawiony rysunek jest jedynie przykładowy. Należałoby wykonać odpowiednio zmodyfikowane szkice także dla kilku innych konfiguracji zbiorów (np. gdy któreś z nich lub wszystkie są rozłączne). Jednakże nawet ten jeden już pozwala nam wyrobić sobie pewną intuicję. Rysunki tego typu noszą nazwę diagramów Venna.



Rysunek 1.1: Lewa i prawa strona związku (1.1.1).

Przypomnijmy teraz prawa rachunku zbiorów, które mogą się przydać:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad (1.1.2)$$

rozdzielność przecięcia względem sumy,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (1.1.3)$$

rozdzielność sumy względem przecięcia.

Jeśli wyobrazimy sobie, że wszystkie rozważane zbiory są podzbiarami pewnej przestrzeni, którą oznaczmy X , to możemy zdefiniować dopełnienie zbioru. Dla danego zbioru S dopełnieniem tym będzie zbiór wszystkich elementów przestrzeni X , które do S nie należą. Oznaczmy je symbolem S' . Zgodnie z definicją mamy $S' = X \setminus S$. Wówczas różnice zbiorów występujące w treści zadania można, przy użyciu dopełnienia, zapisać w następujący sposób:

$$A \setminus B = A \cap B'.$$

Wykorzystamy ten zapis w naszym dowodzie.

Aby wykazać prawdziwość (1.1.1), wyjdziemy od jego prawej strony i będziemy ją przekształcać. Musimy przy tym mieć w pamięci cel, do którego zmierzamy. Otóż chcemy wykazać, że $A \setminus C$ jest *podzbiorem* zbioru $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$ lub też — i to będzie dla nas ważniejsze — zbiór $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$ jest *nadzbiorem* zbioru $A \setminus C$. Cóż to znaczy, że dany zbiór S jest *nadzbiorem* pewnego zbioru T ? Otóż oznacza to, że jest on sumą zbioru T i „czegoś jeszcze”:

$$S = T \cup [\dots], \quad (1.1.4)$$

przy czym zupełnie nieistotne jest, jaki zbiór kryje się pod symbolem $[\dots]$. W naszym dowodzie pójdziemy właśnie tą drogą: postaramy się, wykorzystując (1.1.2) i (1.1.3), tak przekształcać prawą stronę (1.1.1), aby uzyskać

wyrażenie $(A \setminus C) \cup [\dots]$:

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \cup (B \setminus C) &= (A \cap B') \cup (B \cap C') = [A \cup (B \cap C')] \cap [B' \cup (B \cap C')] \\ &= [(A \cup B) \cap (A \cup C')] \cap [(B' \cup B) \cap (B' \cup C')] , \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

gdzie dwukrotnie zostało wykorzystane prawo (1.1.3). Jak wiadomo, operacja polegająca na wzięciu części wspólnej zbiorów jest łączna:

$$(R \cap S) \cap T = R \cap (S \cap T) . \quad (1.1.6)$$

Oznacza to, że w otrzymanym powyżej wyrażeniu można pominąć wszystkie nawiasy prostokątne, bo jakbyśmy ich nie wstawili, otrzymamy zawsze ten sam wynik. Zauważmy ponadto, że pojawiło się powyżej wyrażenie $(B' \cup B)$, czyli suma zbioru i jego dopełnienia. Taka suma to, naturalnie, cała przestrzeń X , bo każdy element przestrzeni należy albo do B , albo do B' . Można więc zamiast prawej strony (1.1.5) napisać:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C') \cap X \cap (B' \cup C') , \quad (1.1.7)$$

po czym w ogóle opuścić X , bowiem dla każdego zbioru S mamy $S \cap X = S$. W efekcie otrzymujemy:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \cap (A \cup C') \cap (B' \cup C') . \quad (1.1.8)$$

Chcieliśmy po prawej stronie otrzymać wyrażenie $A \setminus C$, czyli $A \cap C'$, ale niczego takiego na razie nie ma. Mamy co prawda $A \cup C'$, ale to zupełnie co innego. Otóż bardzo często przy przekształceniach różnych wyrażeń, gdy wiemy, co na końcu chcemy uzyskać, oczekiwane wyrażenie „wstawiamy ręcznie”, oczywiście w taki sposób, aby nie naruszyć równości (np. dodając i odejmując to samo). W naszym przypadku wykorzystamy po prostu następującą tożsamość:

$$A = A \cap X = A \cap (C' \cup C) = \underbrace{(A \cap C')}_{\text{-----}} \cup (A \cap C) , \quad (1.1.9)$$

w której podkreślone zostało interesujące nas wyrażenie. Wstawimy ją w miejsce A do pierwszego nawiasu w (1.1.8), po prawej stronie. Otrzymujemy związek:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = [(A \cap C') \underset{\uparrow}{\cup} \{(A \cap C) \cup B\}] \underset{\uparrow}{\cap} \{(A \cup C') \cap (B' \cup C')\} . \quad (1.1.10)$$

Suma teoriiomnogościowa oraz przecięcie są łączne, więc mieliśmy prawo bezkarnie dopisać nawiasy klamrowe, których nie było w (1.1.8). Zastosujemy

teraz prawo (1.1.3) w odniesieniu do sumy i części wspólnej zaznaczonych w ostatnim wzorze strzałkami. W wyniku tego uzyskamy:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = [(A \cap C') \cap (A \cup C') \cap (B' \cup C')] \quad (1.1.11) \\ \cup [\{(A \cap C) \cup B\} \cap (A \cup C') \cap (B' \cup C')] ,$$

po opuszczeniu nawiasów klamrowych tam, gdzie nie były już potrzebne. Otrzymane wyrażenie ma postać sumy dwóch zbiorów, z których każdy ujęty jest w prostokątne nawiasy. Pokażemy poniżej, że pierwszy z nich równy jest po prostu $A \cap C'$, a drugi wówczas jest nieistotny (czyli jest tym, co we wzorze (1.1.4) oznaczyliśmy $[\dots]$).

Zbiór $A \cap C'$ jest oczywiście podzbiorem zbioru $A \cup C'$, więc

$$[(A \cap C') \cap (A \cup C')] \cap (B' \cup C') = (A \cap C') \cap (B' \cup C') . \quad (1.1.12)$$

Zachodzi także $A \cap C' \subset C' \subset B' \cup C'$, zatem

$$(A \cap C') \cap (B' \cup C') = A \cap C' = A \setminus C . \quad (1.1.13)$$

W efekcie równaniu (1.1.11) można więc nadać postać:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = [A \setminus C] \cup [\dots] \supset A \setminus C .$$

Jak widzimy, teza została wykazana.

Na koniec warto dodać, że tego typu dowody można łatwo i względnie prosto przeprowadzać, posługując się prawami logiki. W tym celu wypiszemy tabelkę wartości logicznych, uwzględniając wszystkie możliwe wartości dla trzech zdań: $x \in A$, $x \in B$ oraz $x \in C$ (w bieżącym zadaniu mamy 8 możliwości, ale łatwo sobie wyobrazić, że przy bardziej rozbudowanych wyrażeniach, z większą liczbą zbiorów, tabelka bardzo się rozrośnie). Aby wykazać (1.1.1), musimy w niej także zawrzeć zdania: $x \in A \setminus C$, $x \in A \setminus B$, $x \in B \setminus C$ oraz $x \in A \setminus B \cup B \setminus C$, a ich wartości logiczne wynikają już z wartości trzech pierwszych zdań oraz z definicji operacji teoriomnogościowych „ $\setminus$ ” oraz „ $\cup$ ”. Jak zwykle symbol „1” oznacza „prawda”, a symbol „0” – „fałsz”.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in A \setminus C$	$x \in A \setminus B$	$x \in B \setminus C$	$x \in A \setminus B \cup B \setminus C$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Teraz wystarczy porównać kolumny czwartą i ostatnią, aby przekonać się, że prawdziwa jest implikacja:

$$x \in A \setminus C \implies x \in A \setminus B \cup B \setminus C, \quad (1.1.14)$$

która w języku zdań logicznych oznacza to samo co (1.1.1) w języku teorii mnogości. Założyliśmy tutaj, że Czytelnik zna podstawowe prawa rachunku zdań i wie, że prawdziwe są implikacje: $0 \implies 0$, $0 \implies 1$, $1 \implies 1$, a fałszywa $1 \implies 0$.

Problem 2

Niech A , B i C będą zbiorami, a symbol $\div$ oznacza „różnicę symetryczną” zbiorów:

$$A \div B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \quad (1.1.15)$$

Wykażemy tożsamości:

$$\text{a) } A \div (B \div C) = (A \div B) \div C, \quad (1.1.16)$$

$$\text{b) } A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C), \quad (1.1.17)$$

$$\text{c) } A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B). \quad (1.1.18)$$

Rozwiązanie

Pierwsze równanie, od którego zaczniemy, można nazwać własnością łączności dla różnicy symetrycznej. Drugie to po prostu rozdzielnosć części wspólnej względem różnicy symetrycznej.

Tożsamość a)

Wyjdziemy od lewej strony równania (1.1.16) i będziemy ją przekształcać, wykorzystując (1.1.2) oraz (1.1.3). Przydadzą nam się także własności łączności i przemienności dla sumy i przecięcia:

$$R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap T, \quad R \cup S = S \cup R, \quad (1.1.19)$$

$$R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup T, \quad R \cap S = S \cap R, \quad (1.1.20)$$

oraz prawa de Morgana:

$$(S \cap R)' = S' \cup R', \quad (1.1.21)$$

$$(S \cup R)' = S' \cap R'. \quad (1.1.22)$$

Jak pamiętamy z poprzedniego przykładu, symbol S' oznacza dopełnienie zbioru S do przestrzeni X : $S' = X \setminus S$. Wiemy też, że wyrażenie $S \setminus R$ zapisać można jako $S \cap R'$. Mamy więc:

$$A \div (B \div C) = \{A \cap [(B \cap C') \cup (B' \cap C)]\} \cup \{A' \cap [(B \cap C') \cup (B' \cap C)]\}. \quad (1.1.23)$$

Idea dowodu polegać będzie na rozwinięciu prawej strony powyższej równości i odpowiednim pogrupowaniu wyrazów. Najpierw przekształcimy pierwsze wyrażenie w nawiasach klamrowych, wykorzystując kilkakrotnie prawa de Morgana:

$$\begin{aligned} A \cap [(B \cap C') \cup (B' \cap C)]' &= A \cap [(B \cap C')' \cap (B' \cap C)'] \\ &= A \cap [(B' \cup C) \cap (B \cup C')] = A \cap (B' \cup C) \cap (B \cup C'). \end{aligned} \quad (1.1.24)$$

Nawiasy prostokątne można było opuścić ze względu na własność łączności dla części wspólnej. Rozwijając to wyrażenie dalej, tym razem przy użyciu (1.1.2), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} A \cap (B' \cup C) \cap (B \cup C') &= [(A \cap B') \cup (A \cap C)] \cap (B \cup C') \\ &= \underbrace{(A \cap B' \cap B)}_{\emptyset} \cup (A \cap B' \cap C') \cup (A \cap C \cap B) \cup \underbrace{(A \cap C \cap C')}_{\emptyset}. \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

Jak widzimy, pojawiły się powyżej dwa zbiory puste jako wynik przecięcia danego zbioru z jego dopełnieniem: $B \cap B' = C \cap C' = \emptyset$. Oczywiście jest, że część wspólna zbioru pustego z jakimkolwiek innym zbiorem także jest zbiorem pustym, a zbiór $\emptyset$ w teoriomnościowej sumie można w ogóle pominąć (bo „dodawanie zera” nic nie zmienia). W efekcie mamy:

$$A \cap [(B \cap C') \cup (B' \cap C)]' = (A \cap B' \cap C') \cup (A \cap C \cap B). \quad (1.1.26)$$

Wróćmy teraz do drugiego wyrażenia w nawiasach klamrowych w formule (1.1.23). Rozwinie my je, korzystając najpierw z rozdzielności przecięcia

względem sumy, a następnie z łączności sumy:

$$\begin{aligned} A' \cap [(B \cap C') \cup (B' \cap C)] &= [A' \cap (B \cap C')] \cup [A' \cap (B' \cap C)] \\ &= (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C). \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

Wstawimy teraz po prawej stronie (1.1.23) otrzymane powyżej wzory:

$$A \div (B \div C) = \underbrace{(A \cap B' \cap C')}_{\text{-----}} \cup \underbrace{(A \cap C \cap B)}_{\text{-----}} \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C). \quad (1.1.28)$$

Otrzymaliśmy wyrażenie, które jest sumą czterech zbiorów. Dwa z nich zostały podkreślone i będzie o nich mowa niżej. Nie jest to jeszcze końcowy wynik, ale bardziej wprawne oko mogłoby już w tym miejscu uznać dowód właściwie za zakończony. Dlaczego? Otóż dlatego, że po prawej stronie mamy pełną symetrię względem dowolnej zamiany nazw zbiorów A , B i C . Ponadto z samej swojej definicji operacja $\div$ jest przemienna. Dlatego też (po lewej stronie) w miejsce $A \div (B \div C)$ moglibyśmy równie dobrze napisać $(B \div C) \div A$, a następnie, posługując się wspomnianą symetrią, łatwo uzasadnilibyśmy, że wyrażenie to musi być równe także $(A \div B) \div C$ i tym samym spełniona jest równość (1.1.16).

My jednak postąpimy w zapowiedziany wcześniej sposób i tak pogrupujemy wyrazy w (1.1.28), aby otrzymać tezę. Powstaje pytanie, jak należy to zrobić. Odpowiedź na nie jest prosta: „należy to zrobić tak, aby otrzymać tezę”, co oznacza po prostu uzyskanie prawej strony równania (1.1.16), czyli $(A \div B) \div C$. Czy możemy dostrzec w (1.1.28) fragmenty tego wyrażenia? Otóż tak, jeśli przypomnimy sobie, iż $A \div B = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$. W podkreślonych wyrazach występują właśnie te poszukiwane fragmenty, a C' będzie można po prostu „wyłączyć przed nawias”. W pozostałych dwóch wyrazach przed nawias wyłączyć będzie można C . Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} A \div (B \div C) & \quad (1.1.29) \\ &= (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A \cap C \cap B) \cup (A' \cap B' \cap C) \\ &= \{[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] \cap C'\} \cup \{[(A \cap B) \cup (A' \cap B')] \cap C\} \\ &= [(A \div B) \cap C'] \cup \{[(A \cap B) \cup (A' \cap B')] \cap C\}. \end{aligned}$$

Widać, że jesteśmy już prawie u celu i potrzebne nam jest jedynie uzasadnienie, że podkreślone wyrażenie to $(A \div B)'$. Jest tak rzeczywiście, bowiem

$$\begin{aligned} (A \div B)' & \quad (1.1.30) \\ &= [(A \cap B') \cup (A' \cap B)]' = (A \cap B')' \cap (A' \cap B)' = (A' \cup B) \cap (A \cup B') \\ &= \underbrace{(A' \cap A)}_{\emptyset} \cup (A' \cap B') \cup (B \cap A) \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset} = (A' \cap B') \cup (B \cap A). \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem tożsamość, którą pragnęliśmy udowodnić:

$$A \div (B \div C) = [(A \div B) \cap C'] \cup [(A \div B)' \cap C] = (A \div B) \div C .$$

Tożsamość b)

Dowód (1.1.17) jest znacznie prostszy. Składa się na niego poniższy ciąg przekształceń:

$$\begin{aligned} A \cap (B \div C) &= A \cap [(B \cap C') \cup (B' \cap C)] & (1.1.31) \\ &= [A \cap (B \cap C')] \cup [A \cap (B' \cap C)] = [(A \cap B) \cap C'] \cup [(A \cap C) \cap B'] \\ &= [(A \cap B) \cap (C' \cup \underset{\uparrow}{A'})] \cup [(A \cap C) \cap (B' \cup \underset{\uparrow}{A'})] . \end{aligned}$$

Przekształcenia te są jasne. Wyjaśnienia wymaga jedynie dopisanie zbioru A' w miejscach oznaczonych strzałkami. Otóż zbiór $(A \cap B)$ jest podzbiorem zbioru A , więc ma zerowe przecięcie z jego dopełnieniem: $(A \cap B) \cap A' = \emptyset$. Podobnie $(A \cap C) \cap A' = \emptyset$. Oznacza to, że w zaznaczonych miejscach dopisaliśmy po prostu zbiory puste.

Aby zakończyć dowód, wystarczy wykorzystać pierwsze prawo de Morgana (1.1.21), po czym zwinąć wyrażenie (1.1.31):

$$\begin{aligned} A \cap (B \div C) &= [(A \cap B) \cap (C \cap A)'] \cup [(A \cap C) \cap (B \cap A)'] & (1.1.32) \\ &= [(A \cap B) \setminus (C \cap A)] \cup [(A \cap C) \setminus (B \cap A)] = (A \cap B) \div (A \cap C) . \end{aligned}$$

Tożsamość b) została w ten sposób wykazana.

Tożsamość c)

W ostatnim przypadku przekształcimy wyrażenie po lewej stronie, najpierw korzystając z definicji (1.1.15):

$$A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B') \cup (B \cap A') , \quad (1.1.33)$$

a następnie z rozdzielności sumy zbiorów względem części wspólnej (1.1.3) oraz z prawa de Morgana (1.1.21), otrzymując

$$\begin{aligned} A \div B &= (A \cup B) \cap \underbrace{(A \cup A')}_X \cap \underbrace{(B' \cup B)}_X \cap (B' \cup A') = (A \cup B) \cap (B' \cup A') \\ &= (A \cup B) \cap (B \cap A')' = (A \cup B) \setminus (A \cap B) , & (1.1.34) \end{aligned}$$

co kończy dowód.

W tego typu przykładach główna trudność polega na wyborze przekształceń, jakich zdecydujemy się dokonywać na teoriomnogościowych wyrażeniach. Na ogół bowiem mogą być one wykonywane na bardzo wiele sposobów. Rada, jakiej można tu udzielić, jest taka, aby zawsze mieć w pamięci cel, do którego

dążymy. Nie należy więc „mechanicznie” przekształcać wzorów, lecz w taki sposób, aby uzyskiwać w nich pożądane struktury.

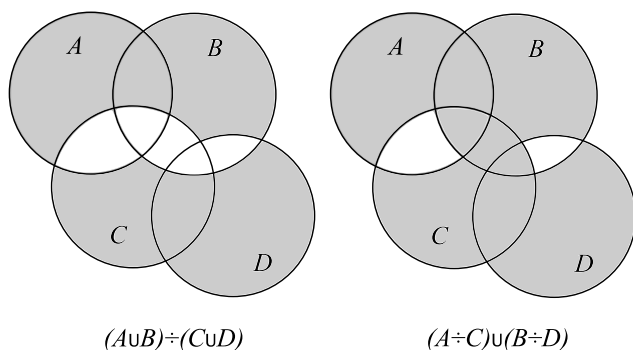
Problem 3

Niech A , B , C i D będą zbiorami. Wykażemy, że

$$(A \cup B) \div (C \cup D) \subset (A \div C) \cup (B \div D). \quad (1.1.35)$$

Rozwiązanie

Na rysunku 1.2 przedstawiliśmy szarym kolorem zbiory, które występują po lewej i po prawej stronie (1.1.35). Przynajmniej dla tej przykładowej konfiguracji zbiorów A , B , C i D widzimy, że zbiór po lewej stronie faktycznie jest podzbiorem tego po prawej. Warto byłoby, aby Czytelnik, w ramach ćwiczeń, wykonał podobne rysunki także dla odmiennych konfiguracji.



Rysunek 1.2: Przykładowa konfiguracja zbiorów z równania (1.1.35).

Metoda dowodu, jaką zastosujemy w tym przypadku, będzie polegała na rozwinięciu obu stron (1.1.35) i porównaniu ich. Zaczniemy od lewej strony, korzystając kolejno:

- (1) z definicji operacji $\div$ podanej w treści poprzedniego zadania,
- (2) z drugiego prawa de Morgana (1.1.22),
- (3) z własności rozdzielności części wspólnej względem sumy (1.1.2),
- (4) z własności łączności części wspólnej (1.1.20) oraz sumy (1.1.19).

Aby nie przerywać toku przekształceń, pod każdą równością zaznaczymy, z której własności w danym miejscu korzystamy.

$$\begin{aligned}
 (A \cup B) \div (C \cup D) &\stackrel{(1)}{=} [(A \cup B) \cap (C \cup D)'] \cup [(A \cup B)' \cap (C \cup D)] \\
 &\stackrel{(2)}{=} [(A \cup B) \cap (C' \cap D')] \cup [(A' \cap B') \cap (C \cup D)] \\
 &\stackrel{(3)}{=} \{[A \cap (C' \cap D')] \cup [B \cap (C' \cap D')]\} \cup \{[(A' \cap B') \cap C] \cup [(A' \cap B') \cap D]\} \\
 &\stackrel{(4)}{=} (A \cap C' \cap D') \cup (B \cap C' \cap D') \cup (A' \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B' \cap D)
 \end{aligned} \tag{1.1.36}$$

Zostawimy teraz na chwilę otrzymane wyrażenie i w podobny sposób przekształcimy prawą stronę (1.1.35):

$$\begin{aligned}
 (A \div C) \cup (B \div D) &\stackrel{(1)}{=} [(A \cap C') \cup (A' \cap C)] \cup [(B \cap D') \cup (B' \cap D)] \\
 &\stackrel{(4)}{=} (A \cap C') \cup (A' \cap C) \cup (B \cap D') \cup (B' \cap D) \\
 &= (A \cap C') \cup (B \cap D') \cup (A' \cap C) \cup (B' \cap D) ,
 \end{aligned} \tag{1.1.37}$$

gdzie na koniec przestawiliśmy składniki sumy, korzystając z jej przemienności (1.1.19).

Porównanie otrzymanych powyżej wyrażeń (1.1.36) oraz (1.1.37) pokazuje, że oba stanowią sumy czterech zbiorów. Co więcej, każdy ze składników teoriomnogościowej sumy (1.1.36) jest podzbiorem odpowiedniego składnika sumy (1.1.37):

$$\begin{aligned}
 A \cap C' \cap D' &\subset A \cap C' , \\
 B \cap C' \cap D' &\subset B \cap D' ,
 \end{aligned} \tag{1.1.38}$$

$$\begin{aligned}
 A' \cap B' \cap C &\subset A' \cap C , \\
 A' \cap B' \cap D &\subset B' \cap D ,
 \end{aligned} \tag{1.1.39}$$

skąd wnosimy, że zachodzi poszukiwana teza:

$$(A \cup B) \div (C \cup D) \subset (A \div C) \cup (B \div D) .$$

1.2 Znajdujemy zbiory na płaszczyźnie

Problem 1

Niech A_t będzie zbiorem punktów na płaszczyźnie zdefiniowanym następująco:

$$A_t := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > tx^2 \wedge y < -tx^2 + 1\}, \quad (1.2.1)$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$. Znajdziemy zbiory

$$B := \bigcup_{t \in [1, \infty[} A_t, \quad \text{oraz} \quad C := \bigcap_{t \in [1, \infty[} A_t. \quad (1.2.2)$$

Rozwiązanie

Rozwiązanie tego typu zadań składa się zazwyczaj z dwóch etapów. Najpierw, wykorzystując rysunek i posługując się wyobraźnią, formułujemy wstępną tezę (czyli w naszym przypadku konkretną postać wzorów B i C). Krok drugi to ściśle wykazanie odgadniętej tezy.

W celu wykonania pierwszego kroku przedstawiliśmy na rysunku 1.3 kilka zbiorów A_t dla różnych wartości parametru t . Im większa wartość t , tym ciemniejszym kolorem narysowany jest odpowiedni zbiór. Rysunek wykonany został dla $t = 1, 2, 4$ oraz 50 (startujemy naturalnie z $t = 1$, co wynika z treści zadania i definicji szukanych zbiorów B i C). Położenie zbiorów A_1, A_2, A_4 oraz A_{50} daje nam pewne wyobrażenie o tym, jak będzie wyglądać ich przecięcie oraz suma. Przede wszystkim z rysunku łatwo można wywnioskować, że dla $1 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ zachodzi:

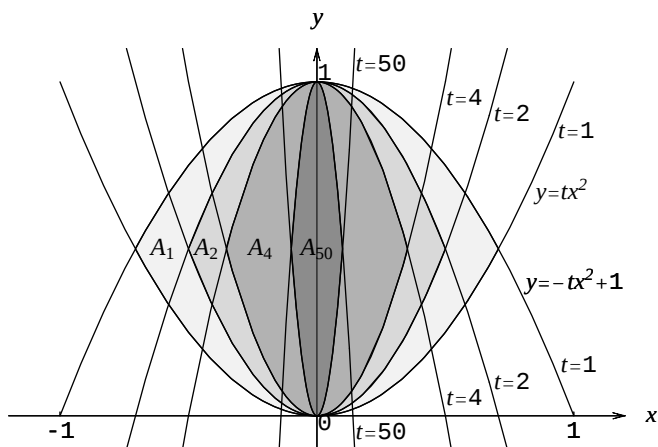
$$A_1 \supset A_{t_1} \supset A_{t_2} \supset A_{t_3} \supset \dots, \quad (1.2.3)$$

czyli wszystkie kolejne zbiory zawierają się w pierwszym (A_1). Oznacza to, że powinniśmy mieć:

$$B = \bigcup_{t \in [1, \infty[} A_t = A_1. \quad (1.2.4)$$

I to jest nasz pierwszy wniosek, który poniżej będziemy się starali udowodnić. Drugi wniosek dotyczy części wspólnej zbiorów. Z zawierania (1.2.3) wynika także, iż

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_{t_1} &= A_{t_1}, \\ A_1 \cap A_{t_1} \cap A_{t_2} &= A_{t_1} \cap A_{t_2} = A_{t_2}, \\ A_1 \cap A_{t_1} \cap A_{t_2} \cap A_{t_3} &= A_{t_2} \cap A_{t_3} = A_{t_3}, \end{aligned} \quad (1.2.5)$$



Rysunek 1.3: Kilka przykładowych zbiorów A_t .

i tak dalej. Można stąd wnosić, że zbiór C będzie miał postać otwartego odcinka $]0, 1[$ leżącego na osi y , czyli

$$C = \bigcap_{t \in [1, \infty[} A_t = \{0\} \times]0, 1[. \quad (1.2.6)$$

Jakikolwiek punkt poza nim nie będzie należał do pewnego A_t , a jeśli tak, to nie będzie należał także do części wspólnej (1.2.2).

Przystąpimy teraz do drugiej części zadania, czyli do ścisłych dowodów obu postulowanych tez. Wykazanie pierwszej z nich sprowadza się do udowodnienia zawierania (1.2.3), które odczytaliśmy z rysunku. Weźmy zatem dowolne parametry t_1 oraz t_2 spełniające $t_2 > t_1 \geq 1$. Sprawdzimy, że jeśli dany punkt na płaszczyźnie, o współrzędnych (x, y) należy do A_{t_2} , to należy również do A_{t_1} . Mamy:

$$(x, y) \in A_{t_2} \implies y > t_2 x^2 \wedge y < -t_2 x^2 + 1. \quad (1.2.7)$$

Ponieważ $t_2 > t_1$, więc także $t_2 x^2 \geq t_1 x^2$, przy czym równość zachodzi jedynie dla $x = 0$. W konsekwencji

$$y > t_2 x^2 \implies y > t_1 x^2. \quad (1.2.8)$$

Analogicznie dla $t_2 > t_1$ zachodzi $-t_2 x^2 \leq -t_1 x^2$ oraz $-t_2 x^2 + 1 \leq -t_1 x^2 + 1$. Otrzymujemy zatem:

$$y < -t_2 x^2 + 1 \implies y < -t_1 x^2 + 1. \quad (1.2.9)$$

Obie otrzymane nierówności oznaczają wspólnie, że $(x, y) \in A_{t_1}$. Wykazaliśmy zatem implikację:

$$(x, y) \in A_{t_2} \implies (x, y) \in A_{t_1} \quad (1.2.10)$$

dla dowolnych x i y . Implikacja ta oznacza dokładnie potrzebne nam zawieranie: $A_{t_2} \subset A_{t_1}$. Pierwszą z tez mamy zatem udowodnioną. Skoro bowiem A_{t_2} zawiera się w A_{t_1} , to wszystkie zbiory A_t dla $t \geq 1$ zawarte są w A_1 , skąd wniosek (1.2.4).

Przejdziemy teraz do drugiej tezy. W ramach dowodu musimy wykazać dwie własności zbioru C :

1. Wszystkie elementy zbioru $\{0\} \times]0, 1[$ należą do C .
2. Jakikolwiek punkt nienależący do zbioru $\{0\} \times]0, 1[$, nie należy do C .

Wykazanie obu tych własności oznaczać będzie równość zbiorów $\{0\} \times]0, 1[$ oraz C . Zaczniemy od pierwszej z nich. Jeśli punkt o współrzędnych (x, y) należy do zbioru $\{0\} \times]0, 1[$, oznacza to, że współrzędne te mają *de facto* postać $(0, y)$, gdzie $0 < y < 1$. Wstawmy więc te współrzędne do nierówności definiujących zbiór A_t . Otrzymujemy:

$$y > t \cdot 0 \quad \wedge \quad y < -t \cdot 0 + 1 \quad \implies \quad y > 0 \quad \wedge \quad y < 1, \quad (1.2.11)$$

ale to jest przecież dokładnie naszym założeniem. Powyższy układ nierówności jest zatem prawdziwy, i to niezależnie od wartości t . W konsekwencji punkt o współrzędnych $(0, y)$, gdzie $0 < y < 1$, należy do wszystkich A_t , a więc także do ich części wspólnej. A skoro tak, to należy również do zbioru C , co chcieliśmy wykazać.

Teraz przystąpimy do dowodzenia drugiej własności. Weźmiemy jakikolwiek punkt leżący poza zbiorem $\{0\} \times]0, 1[$. Jego współrzędne x i y są ustalone. Możliwe są tu następujące sytuacje (niekoniecznie wykluczające się): $x \neq 0$ lub $y \geq 1$ lub $y \leq 0$. Rozpatrzmy je po kolei.

- Dla $x \neq 0$ nierówność $y > tx^2$ można przepisać w postaci $t < y/x^2$. Czy jest możliwe spełnienie tej nierówności dla dowolnego $t \geq 1$? Oczywiście nie, bo prawa strona jest ustalona (jest to konkretna liczba), a t po lewej można wybrać dowolnie duże. Oznacza to, że istnieje takie $t \geq 1$, iż $(x, y) \notin A_t$. W konsekwencji (x, y) nie może też należeć do części wspólnej zbiorów, czyli do C .
- Dla $y \geq 1$ nie jesteśmy w stanie spełnić nierówności $y < -tx^2 + 1$, gdyż liczba po prawej stronie jest co najwyżej równa 1 (pamiętamy, że t jest dodatnie), a nierówność jest ostra. Taki punkt nie może więc należeć do A_t dla $t \geq 1$, a zatem nie może należeć do C .
- Dla $y \leq 0$ rozumowanie przebiega w analogiczny sposób. Tym razem nie możemy spełnić nierówności $y > tx^2$, gdyż liczba po prawej stronie jest nieujemna.

Wniosek: żaden punkt leżący poza zbiorem $\{0\} \times]0, 1[$ nie należy do C , a każdy punkt należący do tego zbioru należy także do C . W ten sposób wykazaliśmy równość (1.2.6).

Problem 2

Zdefiniujmy na płaszczyźnie zbiór A_t jako iloczyn kartezjański:

$$A_t := [-t - 1, t + 1] \times [t, 2t + 2] \quad \text{dla } t \geq 0. \quad (1.2.12)$$

Znajdziemy zbiory

$$B := \bigcup_{t \in [0, 1]} A_t, \quad \text{oraz} \quad C := \bigcap_{t \in [0, 1]} A_t. \quad (1.2.13)$$

Rozwiązanie

Podobnie jak w poprzednim przykładzie mamy tu do czynienia ze zbiorami na płaszczyźnie, które można względnie łatwo narysować. Dla każdego ustalonego t zbiór A_t jest prostokątem (brzeg i wnętrze) o wierzchołkach w punktach o współrzędnych:

$$(-t - 1, t), \quad (t + 1, t), \quad (t + 1, 2t + 2), \quad (-t - 1, 2t + 2). \quad (1.2.14)$$

Ponieważ zgodnie z (1.2.13) interesować nas będą wartości parametru t z przedziału $[0, 1]$, wykreśliliśmy na rysunku 1.4 kilka takich prostokątów, począwszy od $t = 0$ (najciemniejszy prostokąt), aż do $t = 1$ (najjaśniejszy prostokąt).

Jak wynika z rysunku, suma wszystkich zbiorów (czyli zbiór B) powinna być sześciokątem o wierzchołkach:

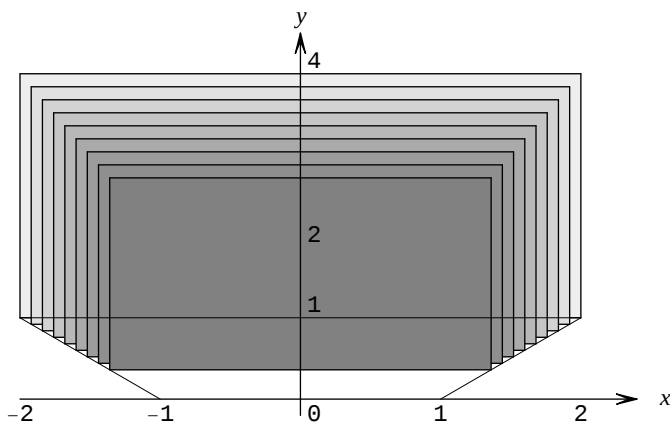
$$(-1, 0), \quad (1, 0), \quad (2, 1), \quad (2, 4), \quad (-2, 4), \quad (-2, 1). \quad (1.2.15)$$

Z kolei część wspólna (zbiór C) to prostokąt o wierzchołkach:

$$(1, 1), \quad (1, 2), \quad (-1, 2), \quad (-1, 1). \quad (1.2.16)$$

Wykażemy poniżej, że tak faktycznie jest. Zaczniemy od zbioru B . Dany punkt na płaszczyźnie należy do zbioru B , o ile należy do chociaż jednego prostokąta A_t dla jakiegoś $t \in [0, 1]$. Stwierdzeniu temu można nadać postać poniższego zdania:

$$(x, y) \in B \iff \exists_{t \in [0, 1]} \quad -t - 1 \leq x \leq t + 1 \quad \wedge \quad t \leq y \leq 2t + 2. \quad (1.2.17)$$

Rysunek 1.4: Układ kilku zbiorów A_t dla $0 \leq t \leq 1$.

Oznacza to, że dla danego $(x, y) \in B$ musi istnieć parametr t spełniający układ sześciu nierówności:

$$\begin{aligned} t &\geq 0, & t &\leq 1, & t &\geq -x - 1, \\ t &\geq x - 1, & t &\leq y, & t &\geq y/2 - 1, \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

którym można nadać bardziej zwartą postać:

$$\max\{0, -x - 1, x - 1, y/2 - 1\} \leq t \leq \min\{1, y\}. \quad (1.2.19)$$

W tym miejscu musimy sobie uświadomić, że nieważne jest, ile to t wynosi. Ważne jest jedynie, aby takie t *istniało*! Jeśli odpowiednie t istnieje, to $(x, y) \in B$. Jeśli nie istnieje, to $(x, y) \notin B$. Kiedy więc jesteśmy w stanie znaleźć jakiegokolwiek t spełniającego (1.2.19)? Odpowiedź jest dosyć jasna: wtedy, gdy spełniona jest nierówność:

$$\max\{0, -x - 1, x - 1, y/2 - 1\} \leq \min\{1, y\}. \quad (1.2.20)$$

Jeśli jednak największa z liczb po lewej stronie musi być mniejsza (bądź równa) od najmniejszej liczby po prawej, to jest to równoważne stwierdzeniu, iż *każda* z liczb po lewej stronie musi być mniejsza (bądź równa) od *każdej* liczby po prawej. Mamy więc następujący układ nierówności, które muszą być jednocześnie spełnione:

$$\begin{aligned} 0 &\leq 1, & -x - 1 &\leq 1, & x - 1 &\leq 1, & y/2 - 1 &\leq 1, \\ 0 &\leq y, & -x - 1 &\leq y, & x - 1 &\leq y, & y/2 - 1 &\leq y. \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

Otrzymany układ nierówności nie zawiera już parametru t i definiuje szukany zbiór B . Nierówności tych jest dosyć dużo, ale część z nich można odrzucić, bo albo są spełnione zawsze, albo wynikają z tych, które pozostawimy.

W ten sposób otrzymujemy:

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 4 \wedge y \geq -x-1 \wedge y \geq x-1\}. \quad (1.2.22)$$

Znajdując punkty przecięcia par prostych spośród:

$$x = -2, \quad x = 2, \quad y = 0, \quad y = 4, \quad y = -x-1, \quad y = x-1, \quad (1.2.23)$$

łatwo się przekonać, że zbiór ten jest właśnie sześciokątem (1.2.15), co przewidzieliśmy na podstawie rysunku.

Przystąpimy teraz do rozwiązywania drugiej części zadania, czyli znajdowania zbioru C . Gdybyśmy chcieli napisać zdanie logiczne podobne do (1.2.17), to jedna rzecz ulegnie zmianie. Teraz punkt (x, y) należał będzie do C , o ile należał będzie nie do jednego, ale do *wszystkich* A_t . Mamy zatem:

$$(x, y) \in C \iff \forall_{t \in [0,1]} -t-1 \leq x \leq t+1 \wedge t \leq y \leq 2t+2. \quad (1.2.24)$$

Wynika stąd układ czterech nierówności, które również muszą być spełnione dla każdego $t \in [0, 1]$:

$$t \geq -x-1, \quad t \geq x-1, \quad t \leq y, \quad t \geq y/2-1. \quad (1.2.25)$$

Najbardziej rygorystyczne warunki otrzymamy, kładąc w nierównościach typu $t \geq \dots$ wartość t równą 0, a w nierównościach typu $t \leq \dots$ wartość t równą 1. Dla tak wybranych wartości układ (1.2.25) musi być spełniony, bo należą one do przedziału $[0, 1]$. I wtedy będzie już spełniony automatycznie dla wszystkich innych parametrów t z tego przedziału. Rozumowanie to prowadzi nas do zbioru C w postaci:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \wedge 1 \leq y \leq 2\}. \quad (1.2.26)$$

Jak widać, zbiór ten jest faktycznie prostokątem o wierzchołkach (1.2.16).

1.3 Znajdujemy kresy zbiorów liczbowych

Problem 1

Wyznamy kresy górny i dolny zbioru (o ile kresy te istnieją):

$$X := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3|y|-1}{5|y|+1} \wedge y \in \mathbb{R} \right\}. \quad (1.3.1)$$

Sprawdzimy także, czy kresy te należą do zbioru X .

Rozwiązanie

W pierwszej kolejności zajmijmy się kresem górnym zbioru. Aby zbiór liczbowy mógł mieć kresy (górną czy dolną), to przede wszystkim musi być ograniczony (odpowiednio z góry bądź z dołu). Powstaje zatem pytanie, czy nasz zbiór jest ograniczony z góry. Aby to sprawdzić, przekształcimy wyrażenie na element x w następujący sposób:

$$x = \frac{3|y| - 1}{5|y| + 1} = \frac{3|y| + 3/5 - 8/5}{5|y| + 1} = \frac{3}{5} - \frac{8}{5(5|y| + 1)} < \frac{3}{5}. \quad (1.3.2)$$

Ta ostatnia nierówność jest oczywiście „ostra”, co później okaże się ważne. Z otrzymanego oszacowania wynika, że zbiór X jest ograniczony z góry, bo niezależnie jakie wartości podstawiać będziemy pod y , otrzymane wyrażenie zawsze będzie mniejsze od $3/5$.

Powstaje pytanie, czy liczba ta jest także kresem tego zbioru, czy też wyłącznie jednym z (nieskończenie) wielu jego górnych ograniczeń. Wiemy, że kres górny jest najmniejszą z liczb ograniczających zbiór z góry, o ile taka istnieje. W przestrzeni liczb rzeczywistych będzie ona istnieć na pewno, ale w przestrzeni liczb wymiernych może jej nie być. Za przykład może tu służyć zbiór $\{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$, którego kresy (równe $\pm\sqrt{2}$) nie należą do przestrzeni $\mathbb{Q}$ (czyli *de facto* ich nie ma).

Wracając do naszego zadania, trzeba stwierdzić, że kluczowe jest teraz zbadanie, czy górnym ograniczeniem zbioru X może być jakaś liczba mniejsza od $3/5$, np. $3/5 - \epsilon$, dla pewnego małego dodatniego ϵ . Jeśli takiej liczby nie ma, to kres równy jest $3/5$. Natomiast jeśli jest, to musi zachodzić:

$$\forall_{y \in \mathbb{R}} \quad x = \frac{3|y| - 1}{5|y| + 1} \leq \frac{3}{5} - \epsilon. \quad (1.3.3)$$

Wykonując przekształcenia analogiczne do (1.3.2), powyższemu warunkowi można nadać postać:

$$\forall_{y \in \mathbb{R}} \quad \frac{8}{5(5|y| + 1)} \geq \epsilon \quad (1.3.4)$$

Jasne jest, że nie da się spełnić tego wymogu. Prawa strona (czyli ϵ) jest ustalona, a lewą możemy uczynić dowolnie małą, wybierając odpowiednio duże y , więc nierówność nie może być prawdziwa dla każdego $y \in \mathbb{R}$. Nie istnieje zatem ϵ spełniające (1.3.3). Wniosek: kresem górnym zbioru X jest liczba $3/5$. Warto ustalić jeszcze, czy kres ten należy do zbioru X , czy też pozostaje poza tym zbiorem. Odpowiedzi na to pytanie dostarcza (1.3.2). Zwróciliśmy już wyżej uwagę, że nierówność ta jest ostra, co oznacza, że $\forall_{y \in \mathbb{R}} \quad x \neq 3/5$. Liczba ta nie może więc należeć do zbioru X .

Poszukiwanie kresu dolnego także musimy rozpocząć od ustalenia, czy zbiór jest ograniczony z dołu. Tym razem przekształcimy wyrażenie na x następująco:

$$x = \frac{3|y| - 1}{5|y| + 1} = \frac{8|y| - 5|y| - 1}{5|y| + 1} = \frac{8|y|}{5|y| + 1} - 1 \geq -1. \quad (1.3.5)$$

Jak widać, zbiór jest ograniczony z dołu przez liczbę -1 . Oczywiście ograniczeń jest nieskończenie wiele. Aby ustalić, jaki jest kres dolny zbioru X , musimy znaleźć największą z tych liczb (naturalnie, o ile taka istnieje). Zadanie to jest bardzo proste, co wynika z faktu, że nierówność (1.3.5) jest „nieostra”. Wybierając $y = 0$, znajdujemy $x = -1$. Mamy więc od razu dwa wnioski: kresem dolnym jest liczba -1 i kres ten należy do X . Podsumowując, znaleźliśmy:

$$\sup X = \frac{3}{5} \notin X, \quad \inf X = -1 \in X. \quad (1.3.6)$$

Pewną zagadkę dla Czytelnika stanowić może to, skąd wiedzieliśmy od razu, że wyrażenia (1.3.2) oraz (1.3.5) należy przekształcać akurat w taki sposób, aby wydzielić z nich odpowiednio $3/5$ oraz -1 . Otóż było to podyktowane postacią wzoru na x oraz intuicją: widać bowiem bez żadnych rachunków, że z racji obecności -1 w liczniku i $+1$ w mianowniku ułamek mniejszy jest od $3/5$, a przybliża się do tej wartości dla bardzo dużych y . Jeśli więc wydzielimy z niego wartość $3/5$, to pozostaje jedynie rozstrzygnąć, czy drugi składnik jest dodatni czy ujemny. Określenie znaku jest na ogół dużo prostsze niż znajdowanie konkretnej wartości. Podobnie rzecz się ma z kresem dolnym, gdzie narzuca się podstawienie $y = 0$, gdyż $|y|$ przyjmuje wówczas najmniejszą wartość.

Problem 2

Wyznamy kresy górny i dolny zbioru:

$$Y := \{y \in \mathbb{R} \mid y = (a + b)(1/a + 1/b) \wedge a > 0 \wedge b > 0\} \quad (1.3.7)$$

oraz sprawdzimy, czy kresy te należą do zbioru Y .

Rozwiązanie

Wyjdziemy od oczywistej nierówności:

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}} \quad (a-b)^2 \geq 0. \quad (1.3.8)$$

Dzięki temu, że $a, b > 0$, nierówność (1.3.8) przepisać można w następujący sposób:

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \iff a^2 + b^2 \geq 2ab \iff \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2. \quad (1.3.9)$$

Z drugiej strony, patrząc na definicję zbioru Y , widzimy, że liczbie y można nadać postać:

$$y = (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2. \quad (1.3.10)$$

Porównanie (1.3.9) oraz (1.3.10) prowadzi do wniosku, że

$$y = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \geq 4. \quad (1.3.11)$$

Zbiór Y jest ograniczony z dołu liczbą 4. Jednocześnie gdy po lewej stronie (1.3.11) położymy $a = b$, to nierówność zmienia się w równość. Wynikają stąd natychmiast dwa wnioski:

$$\inf Y = 4, \text{ oraz } \inf Y \in Y. \quad (1.3.12)$$

Jeśli chodzi o *supremum* zbioru Y , łatwo wykazać, że ono nie istnieje, gdyż zbiór nie jest ograniczony z góry. Bardzo często, gdy badamy zachowanie wyrażenia zależnego od kilku zmiennych (w naszym przypadku od a i od b), wygodnie jest na początku wszystkie, poza jedną, ustalić, a badać zależność od jedynej pozostawionej zmiennej. Połóżmy więc $b = 1$, co odpowiada badaniu pewnego podzbioru zbioru Y . Jeśli wykazemy, że podzbiór ten jest nieograniczony, to oczywiście i sam zbiór Y jest nieograniczony. Mamy więc:

$$y|_{b=1} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \right) \Big|_{b=1} = a + 2 + \frac{1}{a}. \quad (1.3.13)$$

Co dzieje się, gdy a zmierza do 0? Otóż wyrażenie to możemy uczynić dowolnie dużym, gdyż $a + 2 > 2$, natomiast $1/a$ jest większe od dowolnej dodatniej liczby M , o ile tylko weźmiemy $a < 1/M$. Podobnie, kładąc $a = M$, znajdziemy, że

$$y|_{b=1} = M + 2 + \frac{1}{M} > M. \quad (1.3.14)$$

Podsumowując, trzeba stwierdzić, że nie istnieje liczba ograniczająca zbiór Y z góry.

1.4 Sprawdzamy, czy $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności, szukamy klas abstrakcji i sporządzamy wykres

Problem 1

Zbadamy, czy relacja zdefiniowana wzorem:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid (x - 4y)/3 \in \mathbb{Z}\} \quad (1.4.1)$$

jest relacją równoważności. Jeśli tak, to znajdziemy klasy abstrakcji. Sporządzimy wykres relacji.

Rozwiązanie

Jak wiemy z wykładu analizy, relacja $\mathcal{R}$ w zbiorze X jest po prostu podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $X \times X$:

$$\mathcal{R} \subset X \times X.$$

Jeśli weźmiemy parę elementów tego zbioru, np. a i b , to mówimy, że pozostają one w relacji, jeśli $(a, b) \in \mathcal{R}$. Używa się także notacji $a\mathcal{R}b$. Trzeba naturalnie pamiętać, że jeśli para (a, b) należy do takiego podzbioru, to wcale jeszcze nie oznacza, że również para (b, a) do niego należy. Relację, dla której ten warunek jest jednak spełniony, nazywamy symetryczną. $a\mathcal{R}b$ nie oznacza więc w ogólności tego samego co $b\mathcal{R}a$.

W matematyce, ale także w fizyce, szczególnie ważną rolę odgrywają tzw. relacje równoważności. Przypomnimy poniżej stosowną definicję. Relację $\mathcal{R}$ nazywamy relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia ona trzy warunki:

1. Dla każdego $x \in X$ zachodzi: $(x, x) \in \mathcal{R}$. Relację o tej własności nazywamy *zwrotną*.
2. Dla każdych $x, y \in X$ prawdziwa jest implikacja:

$$(x, y) \in \mathcal{R} \implies (y, x) \in \mathcal{R}. \quad (1.4.2)$$

Jak wspominaliśmy wyżej, w takim przypadku mówimy o relacji *symetrycznej*.

3. Dla każdych $x, y, z \in X$ mamy:

$$(x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{R} \implies (x, z) \in \mathcal{R}. \quad (1.4.3)$$

Relacja taka jest *przechodnia*.

Zbadamy teraz, czy relacja (1.4.1) spełnia te warunki.

- *Zwrotność.* Sprawdzić musimy, czy $(x, x) \in \mathcal{R}$, a więc czy

$$\frac{x - 4x}{3} \in \mathbb{Z}. \quad (1.4.4)$$

Warunek ten jest w sposób oczywisty spełniony, ponieważ

$$\frac{x - 4x}{3} = \frac{-3x}{3} = -x, \quad (1.4.5)$$

a x z założenia jest liczbą całkowitą. Relacja jest zatem zwrotna.

- *Symetryczność.* Teraz musimy upewnić się, czy jeśli $n := (x - 4y)/3$ jest liczbą całkowitą, to także można to powiedzieć o $m := (y - 4x)/3$. W tym celu obliczymy sumę tych dwóch liczb:

$$\begin{aligned} n + m &= \frac{x - 4y}{3} + \frac{y - 4x}{3} = \frac{x - 4y + y - 4x}{3} \\ &= -\frac{3x + 3y}{3} = -(x + y) \in \mathbb{Z}_{x, y \in \mathbb{Z}}. \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Skoro $n \in \mathbb{Z}$ oraz $n + m \in \mathbb{Z}$, to naturalnie musi także zachodzić $m \in \mathbb{Z}$. Relacja jest więc symetryczna.

- *Przechodność.* Tym razem zakładamy, że $n := (x - 4y)/3 \in \mathbb{Z}$ oraz $m := (y - 4z)/3 \in \mathbb{Z}$, a celem naszym jest wykazanie, iż także liczba $l := (x - 4z)/3 \in \mathbb{Z}$. Podobnie jak w poprzednim punkcie obliczymy:

$$n + m - l = \frac{x - 4y}{3} + \frac{y - 4z}{3} - \frac{x - 4z}{3} = -\frac{3y}{3} = -y \in \mathbb{Z}. \quad (1.4.7)$$

Stąd natychmiast wypływa wniosek, że $l \in \mathbb{Z}$, czyli $(x, z) \in \mathcal{R}$. Relacja jest więc przechodnia.

Podsumowując, stwierdzamy, że relacja zdefiniowana w treści zadania w istocie jest relacją równoważności. Jak wiadomo z wykładu, zbiór $\mathbb{Z}$ rozpada się w takiej sytuacji na klasy elementów równoważnych (w tej relacji), czyli tzw. klasy abstrakcji (równoważności). Znalezieniem tych klas zajmiemy się poniżej.

Jeśli liczby całkowite x i y pozostają ze sobą w relacji, to naturalnie $k := (y - 4x)/3$ jest całkowite. Przekształcając to równanie, napiszemy:

$$y = 4x + 3k. \quad (1.4.8)$$

Podstawiając tutaj pewne ustalone $x \in \mathbb{Z}$ oraz różne liczby całkowite k , otrzymujemy te elementy y zbioru $\mathbb{Z}$, które są dla x równoważne. W ten sposób, biorąc $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, znajdujemy najpierw klasę elementu $x = 0$:

$$[0]_{\mathcal{R}} = \{0, 3, -3, 6, -6, \dots\}. \quad (1.4.9)$$

Podobnie:

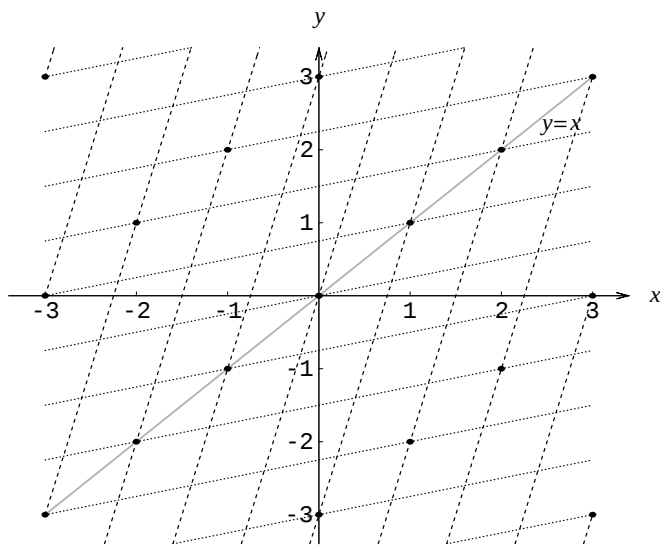
$$\begin{aligned} [1]_{\mathcal{R}} &= \{1, 4, -2, 7, -5, \dots\}, \\ [2]_{\mathcal{R}} &= \{2, 5, -1, 8, -4, \dots\}. \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

Zauważmy, że więcej klas równoważności nie ma. Np. $x = 3$ należy już do klasy $[0]_{\mathcal{R}}$, $x = 4$ do klasy $[1]_{\mathcal{R}}$ itp. Dzięki własności przechodniości relacji (1.4.3) łatwo jest bowiem wykazać, że jeśli jakiś element zbioru należy do dwóch klas, to klasy te są identyczne. W efekcie zachodzi:

$$\mathbb{Z} = [0]_{\mathcal{R}} \cup [1]_{\mathcal{R}} \cup [2]_{\mathcal{R}}, \quad (1.4.11)$$

oraz

$$[i]_{\mathcal{R}} \cap [j]_{\mathcal{R}} = \emptyset \quad \text{dla } i \neq j, \text{ gdzie } i, j = 0, 1, 2. \quad (1.4.12)$$



Rysunek 1.5: Wykres relacji (1.4.1).

Pozostaje nam jeszcze wykonać wykres relacji. Będzie go stanowił zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie, których współrzędne (całkowite) pozostają ze sobą w relacji. Punkty te przedstawione są na rysunku 1.5 za pomocą czarnych punktów. Jak już wiemy z (1.4.8), leżą one na prostych $y = 4x + 3k$. Te pomocnicze proste zaznaczyliśmy na wykresie przerywanymi liniami (pamiętajmy, że nie całe linie, ale jedynie dyskretne, czarne punkty, tworzą wykres relacji). Naturalnie, dzięki symetryczności relacji punkty należące do niej muszą znajdować się jednocześnie na prostych typu (1.4.8), w których

x i y zamienilibyśmy rolami. Tak jest w istocie. Proste te zostały przedstawione liniami kropkowanymi. Szarą linią wykreślona jest ważna prosta $y = x$. Ze względu na własność zwrotności wszystkie punkty o całkowitych współrzędnych muszą być na niej zaznaczone jako należące do $\mathcal{R}$ (każde x pozostaje w relacji z $y = x$). Z kolei własność symetryczności manifestuje się na wykresie niezmienniczością przy jego odbiciu względem tej prostej.

Problem 2

Sprawdźmy, że relacja:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 - 4x^2 = y^4 - 4y^2\} \quad (1.4.13)$$

jest relacją równoważności, znajdziemy klasy równoważności oraz sporządzimy wykres relacji.

Rozwiązanie

Relacja ta należy do szerszej klasy relacji definiowanych przez funkcje. W naszym przypadku funkcją tą jest

$$\phi(x) = x^4 - 4x^2, \quad (1.4.14)$$

a sama relacja zdefiniowana jest równaniem:

$$\phi(x) = \phi(y). \quad (1.4.15)$$

Wykażemy poniżej, że taka relacja w istocie jest relacją równoważności. Definicję znamy już z poprzedniego zadania, więc od razu możemy przystąpić do sprawdzania poszczególnych warunków.

- *Zwrotność.* Naturalnie każdy z elementów $x \in \mathbb{R}$ pozostaje w relacji z samym sobą, bo zawsze spełniony jest warunek $\phi(x) = \phi(x)$.
- *Symetryczność.* Ponieważ z $\phi(x) = \phi(y)$ wynika, że $\phi(y) = \phi(x)$, więc relacja jest symetryczna.
- *Przechodność.* Implikacja:

$$\phi(x) = \phi(y) \wedge \phi(y) = \phi(z) \implies \phi(x) = \phi(z) \quad (1.4.16)$$

jest prawdziwa w sposób oczywisty, więc relacja jest przechodnia.

Mamy zatem do czynienia z relacją równoważności. Wiemy, że określa ona rozkład zbioru liczb rzeczywistych na klasy równoważnych elementów. Zbadamy je poniżej. Zanim jednak do tego przejdziemy, zwróćmy jeszcze uwagę, że do tej pory nigdzie nie wykorzystaliśmy konkretnej postaci funkcji $\phi(x)$ i nasze wnioski są słuszne dla dowolnej relacji zdefiniowanej przez funkcję.

Załóżmy, że chcemy ustalić, jakie elementy pozostają w relacji z wybranym wcześniej elementem x . W tym celu musimy rozważyć równanie (1.4.15), w którym x jest ustalone, a y jest niewiadomą. Należy więc rozwiązać równanie:

$$y^4 - 4y^2 = x^4 - 4x^2 \quad (1.4.17)$$

ze względu na y . Najwygodniej jest przepisać je w postaci:

$$y^4 - x^4 - 4y^2 + 4x^2 = (y^2 - x^2)(y^2 + x^2) - 4(y^2 - x^2) = (y^2 - x^2)(y^2 + x^2 - 4) = 0. \quad (1.4.18)$$

Jeśli równanie to ma być spełnione, to pierwszy bądź drugi czynnik (bądź oba razem) musi być równy zeru. Z równania

$$y^2 - x^2 = 0 \quad (1.4.19)$$

dostajemy dwie proste na płaszczyźnie: $y = x$ i $y = -x$. Drugie:

$$y^2 + x^2 - 4 = 0, \quad (1.4.20)$$

jest po prostu równaniem okręgu o środku w początku układu i promieniu 2. Na tej podstawie możemy od razu podać klasy elementu x . Będą one liczyć od 2 do 4 elementów.

- Gdy $|x| > 2$, to (1.4.20) nie ma rozwiązań, bo lewa strona jest zawsze dodatnia, więc klasę tworzą jedynie rozwiązania otrzymane z (1.4.19):

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{x, -x\}. \quad (1.4.21)$$

- Dla $x = 2$ równanie (1.4.20) ma jedno rozwiązanie $y = 0$, a oprócz tego mamy $y = \pm 2$ z (1.4.19), więc

$$[2]_{\mathcal{R}} = \{2, 0, -2\}, \quad (1.4.22)$$

co równie dobrze można by oznaczyć $[0]_{\mathcal{R}}$. Identyczny wynik otrzymamy naturalnie dla $x = -2$.

- Gdy $0 < |x| < 2$, to mamy w sumie cztery rozwiązania, więc tyle też elementów liczyć będzie klasa

$$[x]_{\mathcal{R}} = \{x, -x, \sqrt{4 - x^2}, -\sqrt{4 - x^2}\}, \quad (1.4.23)$$