MATURA Z MATEMATYKI

przystępnie, szczegółowo

π

Maciej Dombrowski

Pełny tytuł: “Matura z matematyki: przystępnie, szczegółowo. Vademecum z zakresu podstawowego”

Autor: Maciej Dombrowski

Autor okładki: Maciej Dombrowski

Numer ISBN: 978-83-961569-0-7

Źródło ilustracji należących do domeny publicznej: *www.publicdomainvectors.org*

Program użyty do rysowania funkcji: *www.padowan.dk*

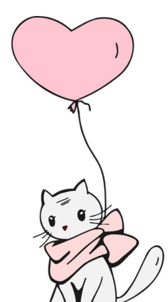
Program użyty do rysowania figur oraz niektórych funkcji: *www.car.rene-grothmann.de*

Kompozycja pracy i słowa wstępu

Książka ta została napisana w oparciu o wymagania szczegółowe dla szkół średnich oraz niektóre wymagania szczegółowe dla szkół gimnazjalnych, zawarte w podstawie programowej kształcenia ogólnego matematyki. Stanowią one również bazę, na podstawie której tworzone są zadania na egzamin maturalny. Każdy temat z tej publikacji jest wzięty bezpośrednio lub pośrednio właśnie z tej podstawy programowej, dzięki czemu stanowi ona bardzo dobrą formę nauki do matury z matematyki. Pragnę jednak zaznaczyć, że podstawa programowa samych przedmiotów w szkole średniej może być trochę bardziej rozszerzona niż ta maturalna, więc niniejsza książka może być czasami zbyt mało obszerna do nauki na sprawdzian/kartkówkę. Myślę jednak, że każdy podręcznik "najpoważniej" traktuje właśnie te zagadnienia, które mogą się pojawić na maturze, więc na pewno w dużej części poniższe tematy będą wyczerpywały również podstawę programową przedmiotów szkół średnich. Dlaczego niektóre tematy zostały zaczerpnięte tylko w pośredni sposób z podstawy programowej matury? Chodzi tutaj o to, że niektóre tematy z tej podstawy złączono w jeden dłuższy temat, a niektóre rozbito na parę krótszych tematów. Nic poza tym. Po prostu niektóre tematy łatwiej było omawiać w taki właśnie sposób. Zadania i przykłady z tej książki są utworzone przez jej autora i – mimo wszelkich jego starań – mogą się one różnić od tych, które znajdziecie na maturze. Różnica ta nie powinna być wielka i na pewno zadania z tej książki pomogą Wam w ogólnym zrozumieniu tematu/zagadnienia, natomiast w celu jak najlepszego przygotowania się do zadań z matury dobrze jest rozwiązywać jak najwięcej zadań zaczerpniętych wprost z arkuszy maturalnych. W książce występują zwroty do Osoby Czytającej i są to zwroty per "Czytelnik", a więc w formie męskoosobowej. Mam nadzieję, że żeńska strona odbiorców nie ucierpi na tym zabiegu, po prostu dziwnie byłoby przy każdym takim zwrocie pisać obie formy. Pamiętajcie także, że nie jest to podręcznik naukowy i wystąpi w niej dużo języka kolokwialnego, pewnie zdarzy się kilka nie do końca "akademickich" objaśnień, a nawet mogą zdarzyć się mniejsze lub większe błędy (w szczególności błędy językowe oraz interpunkcyjne). Możecie takowe zgłaszać na poniższy adres mailowy, ale zapraszam również do dzielenia się komentarzami oraz zadawania pytań za jego pośrednictwem:

kontaktmaturazmatematyki@gmail.com

Jeśli spodobała Ci się ta książka, poleć ją znajomym!



Spis treści

1. **Krótkie przypomnienie**
   - Dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie
   - Liczby, zbiory liczbowe
2. **Liczby rzeczywiste**
   - Przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków, potęg)
   - Oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych)
   - Oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych
   - Wykorzystuje podstawowe własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką). Zapisuje liczby w postaci notacji wykładniczej, tzn. w postaci $a \cdot 10^k$, gdzie $1 \leqslant a < 1$, a k jest liczbą całkowitą
   - Wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym
   - Posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej
   - Oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia
   - Wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok)
3. **Wyrażenia algebraiczne**
   - Używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$
4. **Równania i nierówności**
   - Sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności
   - Wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
   - Rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą
   - Rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą
   - Korzysta z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = -8$
   - Korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7) = 0$.
   - Rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3} = 2$, $\frac{x+1}{x} = 2x$
5. **Funkcje**
   - Określa funkcje za pomocą wzoru, tabeli, opisu słownego
   - Oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość
   - Odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą)
   - Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x+a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$
   - Interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej. Rysuje wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru. Wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie

- Interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje). Wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie. Szkicuje wykres funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie
- Chwilowy powrót do wyznaczania dziedziny funkcji, zbioru wartości funkcji oraz monotoniczności funkcji
- Rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x} = 2x$. Rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą
- Wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym
- Wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym).
- Szkicuje wykres funkcji $f(x) = a/x$ dla danego a, korzysta ze wzoru i wykresu dla tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi
- Szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw
- Posługuje się funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym

6. **Ciągi**

- Wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym
- Bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny; Stosuje wzór na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego
- Bada, czy dany ciąg jest geometryczny; Stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

7. **Figury płaskie**

- Korzysta ze związków między kątami utworzonymi przez prostą przecinającą dwie proste równoległe
- Rozpoznaje wzajemne położenie prostej i okręgu, rozpoznaje styczną do okręgu; Korzysta z faktu, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności
- Rozpoznaje kąty środkowe; Stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym
- Oblicza długość okręgu i łuku okręgu; korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych
- Oblicza pole koła, pierścienia kołowego, wycinka kołowego
- Stosuje twierdzenie Pitagorasa; oblicza pola i obwody trójkątów
- Korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i w trapezach; oblicza pola i obwody czworokątów
- Zamienia jednostki pola
- Oblicza wymiary wielokąta powiększonego lub pomniejszonego w danej skali; Oblicza stosunek pól wielokątów podobnych; Rozpoznaje wielokąty przystające i podobne; Stosuje cechy przystawania trójkątów; Korzysta z własności trójkątów prostokątnych podobnych; Rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów
- Rozpoznaje i konstruuje symetralną odcinka oraz dwusieczną kąta; Konstruuje kąty o miarach $60°$, $30°$, $45°$
- Konstruuje okrąg opisany na trójkącie oraz okrąg wpisany w trójkąt
- Rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności

8. **Bryły**

- Rozpoznaje graniastosłupy i ostrosłupy prawidłowe; Rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami i przekątnymi, itp.), oblicza miary tych kątów; Rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów; Rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami; Oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym)

- Określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną
- Oblicza pole powierzchni i objętość walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym); Rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą, a podstawą), oblicza miary tych kątów
- Zamienia jednostki objętości

9. **Trygonometria**

   - Wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od $0°$ do $180°$; Korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora); Oblicza miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo - korzystając z tablic lub kalkulatora - przybliżoną);
   - Stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ oraz $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$
   - Znając wartość jednej z funkcji sinus lub cosinus, wyznacza wartość pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego
   - Korzysta z własności funkcji trygonometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi

10. **Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej**

    - Wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty
    - Bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich współczynników kierunkowych
    - Oblicza współrzędne przecięcia dwóch prostych
    - Wyznacza współrzędne środka odcinka
    - Oblicza odległość dwóch punktów
    - Znajduje obrazy niektórych figur geometrycznch (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu

11. **Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka**

    - Wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych
    - Oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych
    - Zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, nie wymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania
    - Oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa

0.1 Oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych

W tym akapicie wprowadzimy sobie pojęcie potęgi liczby i pokażemy podstawowe działania na potęgach. Potęga liczby składa się z *wykładnika potęgi* n oraz *podstawy potęgi* a:

$$a^n.$$

Podstawa potęgi mówi nam, jaką liczbę będziemy mnożyć przez siebie samą, natomiast wykładnik – ile razy ta liczba wystąpi w takim mnożeniu. Przykład:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Przy podstawie równej 2 i wykładniku równym 3 naszą potęgę możemy rozpisać jako mnożenie trzech dwójek przez siebie same. Gdy wykładnik potęgi jest równy 1, wynik takiego potęgowania będzie równy samej podstawie potęgi. Można powiedzieć, że w takim wypadku podstawa występuje raz i nie ma za bardzo z czym jej wymnożyć:

$$6^1 = 6.$$

Z kolei, gdy wykładnik potęgi jest równy 0, to wynikiem jest zawsze 1, niezależnie od tego, jaka jest podstawa potęgi:

$$10000000^0 = 1.$$

Wiem, że wydaje się to na początku dziwne, ale jeszcze postaram się to wyjaśnić później. Teraz przejdziemy do działań na potęgach. Najbardziej podstawowym z nich jest dodawanie wykładników potęg o tej samej podstawie w przypadku ich mnożenia:

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}.} \tag{0.1}$$

Zobaczmy, jak to wygląda na przykładzie:

$$3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5.$$

Wyjaśnienie tego jest stosunkowo proste. Spójrzmy, co się stanie, gdy obie potęgi rozbijemy na mnożenie poszczególnych liczb:

$$3^2 \cdot 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 3^{3+2}.$$

Po rozbiciu potęg na mnożenie podstaw otrzymujemy mnożenie dwóch trójek pomnożone przez mnożenie trzech trójek, czyli tak naprawdę mnożenie pięciu trójek, co jest niczym innym jak 3 do potęgi 5!

W podobny sposób możemy wyjaśnić drugie podstawowe działanie na potęgach, czyli odejmowanie wykładników potęg o tej samej podstawie w przypadku ich dzielenia:

$$\boxed{a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad a \neq 0.} \tag{0.2}$$

Zobaczmy to na przykładzie:

$$4^5 : 4^3 = \frac{4^5}{4^3}.$$

Zauważmy teraz, że 4^5 możemy rozbić na mnożenie pięciu czwórek, następnie z mnożenia trzech z nich "zbudować" 4^3, a z mnożenia dwóch z nich "zbudować" 4^2:

$$4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 \cdot 4^2,$$

a więc:

$$\frac{4^3 \cdot 4^2}{4^3} = 4^2.$$

Po rozbiciu naszej potęgi dochodzimy do zapisu, w którym możemy dwa wyrazy skrócić, jak w przypadku zwykłego ułamka, co ostatecznie jest równoważne z odjęciem jednego wykładnika potęgi od drugiego:

$$4^5 : 4^3 = 4^{5-3} = 4^2.$$

Następnym ważnym działaniem na potęgach jest mnożenie podstaw potęg o tych samych wykładnikach w przypadku ich mnożenia.

$$\boxed{a^n \cdot b^n = c^n,} \tag{0.3}$$

gdzie $c = a \cdot b$.

Zobaczmy to sobie na przykładzie. Mamy mnożenie dwóch potęg, które mają taki sam wykładnik, ale różnią się podstawami potęgi:

$$2^3 \cdot 3^3.$$

Spróbujmy znowu rozbić obie potęgi:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3,$$

a następnie skorzystajmy z zasady przemienności mnożenia i ustawmy sobie nasze wyrazy naprzemiennie: raz dwójka, raz trójka, otrzymując:

$$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 6 \cdot 6 \cdot 6,$$

a więc końcowo otrzymujemy:

$$2^3 \cdot 3^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3.$$

Widać więc, że przy mnożeniu potęg o tych samych wykładnikach, ale różnych podstawach, otrzymujemy potęgę o tym samym wykładniku i podstawie równej iloczynowi podstaw "składników".

To samo oczywiście tyczy się dzielenia potęg o tych samych wykładnikach i różnych podstawach. Można to zresztą łatwo pokazać dzięki zamianie dzielenia na mnożenie odwrotności ułamka, przez co dojdziemy do sytuacji, jak we wzorze (0.3):

$$6^3 : 2^3 = 6^3 \cdot \left(\frac{1}{2^3}\right) = 6^3 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2}\right) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(6 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \left(6 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \left(6 \cdot \frac{1}{2}\right) = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3.$$

Powyższą zależność można również zapisać dzięki wykorzystaniu wzoru, o którym zaraz sobie powiemy. W kolejnym działaniu na potęgach dowiemy się bowiem, co się stanie, jeśli podniesiemy do potęgi cały ułamek. Odpowiedź brzmi: możemy wtedy podnieść do tej potęgi osobno licznik i mianownik tego ułamka:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \qquad b \neq 0.} \tag{0.4}$$

Przyjrzyjmy się tej zasadzie nieco bliżej. Cała potęga to liczba, która jest wynikiem mnożenia n podstaw potęgi przez siebie. W poniższym przykładzie

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

podstawą potęgi jest ułamek $\frac{2}{3}$, a n jest równe 3. Oznacza to więc, że możemy tę potęgę obliczyć, mnożąc przez siebie trzy ułamki $\frac{2}{3}$:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3},$$

natomiast z zasady mnożenia ułamków otrzymujemy:

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^3}{3^3}.$$

Przyjrzyjmy się teraz wcześniejszemu przykładowi:

$$6^3 : 2^3 = \frac{6^3}{2^3}.$$

Powyższy ułamek jest więc równy całemu ułamkowi $\frac{6}{2}$ podniesionemu do potęgi 3:

$$\frac{6^3}{2^3} = \left(\frac{6}{2}\right)^3,$$

ale przecież możemy najpierw obliczyć wyrażenie w samym nawiasie. Ułamek ten jest równy liczbie 6 podzielonej przez 2, a więc jest równy liczbie 3. Otrzymujemy więc na końcu 3^3:

$$\left(\frac{6}{2}\right)^3 = (3)^3 = 3^3.$$

Jednym z ostatnich działań na potęgach będzie podnoszenie potęgi do potęgi. Kiedy podnosimy potęgę do jeszcze jednej potęgi, podstawa potęgi pozostaje niezmieniona, natomiast wykładniki potęg mnożymy przez siebie:

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}.} \tag{0.5}$$

Przykład tego jest bardzo prosty. Zapiszmy na początek

$$(3^3)^2.$$

Znając już definicję potęgi, wiemy, że wykładnik $()^2$ mówi nam, iż powinniśmy wymnożyć dwa razy przez siebie liczby, które są w nawiasie (wyrażene w nawiasie jest wtedy podstawą potęgi). Pamiętając też o dodawaniu wykładniku potęg o tych samych podstawach, otrzymujemy:

$$(3^3)^2 = 3^3 \cdot 3^3 = 3^{3+3} = 3^6.$$

W przypadku ostatniej właściwości zajmiemy się czymś, o czym wcześniej nie wspomnieliśmy. Co bowiem, jeśli wykładnik potęgi jest ujemny? Można to wyjaśnić w dosyć prosty sposób: dodanie $+1$ do wykładnika potęgi oznacza, że mnożymy całą potęgę przez jeszcze jedną podstawę. Co więc może oznaczać ujemny wykładnik potęgi? Oczywiście działanie odwrotne, czyli dzielenie przez podstawę potęgi:

$$\boxed{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \qquad a \neq 0,} \tag{0.6}$$

a więc również:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} \qquad a \neq 0.} \tag{0.7}$$

Ujemne potęgi podlegają oczywiście wszystkim poprzednim wzorom z wykorzystaniem potęg, np:

$$2^{-3} \cdot 2^{-2} = 2^{-3+(-2)} = 2^{-5}.$$

Z wykorzystaniem tych wzorów możemy teraz pokazać, dlaczego dowolna liczba podniesiona do potęgi zerowej daje w wyniku 1. Przypomnijmy sobie, że dowolna liczba podniesiona do potęgi 1 da nam po prostu liczbę, która jest w podstawie potęgi, natomiast podniesiona do -1 da nam ułamek o liczniku 1 i mianowniku równym podstawie potęgi. Zobaczmy więc, co się stanie, gdy takie potęgi wymnożymy:

$$2^1 \cdot 2^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1,$$

ale również z twierdzenia o dodawaniu potęg otrzymujemy:

$$2^1 \cdot 2^{-1} = 2^{1+(-1)} = 2^0,$$

stąd:

$$2^0 = 1.$$

Łatwo zauważyć, że reguła ta nie zależy od tego, jaka jest podstawa potęgi, ponieważ w każdej sytuacji otrzymamy liczbę podzieloną przez samą siebie, czyli po prostu 1.

Dalsze działania na potęgach wymagają wprowadzenia pojęcia pierwiastka, więc omówimy je w części z pierwiastkami.

Przykład 0.1 *Wartość wyrażenia* $\left(\frac{9}{4}\right)^{-1} \cdot \frac{2^{10}}{3}$ *jest równa:*

(a) 2^8

(b) $\left(\frac{2^4}{3}\right)^3$

(c) $\frac{1}{3^2}$

(d) $\frac{4^4}{3}$

Jeśli mamy wyrażenie składające się z wielu różnych potęg, to na pewno musimy próbować tak zamieniać ich podstawy, aby móc skorzystać z któregoś działania na potęgach. W przeciwnym wypadku obliczanie tego mogłoby zająć wieki. Spójrzmy więc na nasze potęgi oraz zastanówmy się, jak i które z nich możemy inaczej zapisać, aby nasze wyrażenie było trochę prostsze. Zauważmy najpierw, że lewy ułamek jest brany do potęgi -1, czego możemy łatwo się "pozbyć", po prostu odwracając naszą liczbę:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^1 \cdot \frac{2^{10}}{3},$$

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{2^{10}}{3}.$$

Szukamy dalej takich potęg, które moglibyśmy zapisać w formie tej samej podstawy. Zauważmy, że 4 możemy zapisać jako 2^2, a 9 jako 3^2. Dzięki temu będziemy mogli łatwo "połączyć" potęgi z jednego i drugiego ułamka:

$$\frac{2^2}{3^2} \cdot \frac{2^{10}}{3} = \frac{2^2 \cdot 2^{10}}{3^2 \cdot 3} = \frac{2^{12}}{3^3}.$$

Mamy już liczbę bardzo blisko liczby z odpowiedzi (b). Zobaczmy, czy uda nam się zapisać ją w taki sposób:

$$\frac{2^{12}}{3^3} = \left(\frac{2^4}{3}\right)^3.$$

Poprawną odpowiedzią jest odpowiedź (b).

Przykład 0.2 *Wyrażenie* $\frac{3^{-3}}{18^3} \cdot 6^3$ *jest równe:*

(a) 6

(b) 3^{-6}

(c) 6^{-3}

(d) 3

Także w tym wypadku musimy się zastanowić, w jaki sposób moglibyśmy zapisać niektóre wyrazy tego wyrażenia, aby skorzystać z pewnych działań na ułamkach. Zauważamy od razu, że podstawy 3 nie zamienimy na podstawę 6 w prosty sposób i na odwrót. Spróbujmy więc coś zrobić z potęgą, której podstawa jest równa liczbie 18. Tej potęgi również łatwo nie zamienimy na potęgę liczby 3 lub 6, ale możemy tutaj wykombinować co innego. Potęgę 18^3 możemy zamienić na mnożenie potęg 3^3 oraz 6^3, ponieważ w takim przypadku mnożymy potęgi, a wykładniki przepisujemy:

$$\frac{3^{-3}}{3^3 \cdot 6^3} \cdot 6^3.$$

Dzięki temu wyrazy 6^3 nam się skrócą i zostaniemy z następującym wyrażeniem:

$$\frac{3^{-3}}{3^3} = 3^{-3} : 3^3 = 3^{-3-3} = 3^{-6}.$$

Poprawną odpowiedzią jest więc odpowiedź (b).

Podsumowanie

- Potęga składa się z podstawy potęgi a oraz wykładnika potęgi n

$$a^n$$

- Podstawa potęgi mówi nam, jaką liczbę będziemy mnożyć przez siebie samą, a wykładnik potęgi – ile razy ta liczba wystąpi w tym mnożeniu

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

- Kiedy mnożymy dwie potęgi o tej samej podstawie, dodajemy ich współczyniki do siebie, a podstawę przepisujemy

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

- Kiedy dzielimy dwie potęgi o tej samej podstawie, odejmujemy ich współczynniki od siebie, a podstawę przepisujemy

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad a \neq 0$$

- Kiedy mnożymy dwie potęgi o tych samych wykładnikach, wykładnik przepisujemy, a podstawy ze sobą mnożymy

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

- Potęgę całego ułamka możemy zamienić na potęgowanie osobno licznika i mianownika tego ułamka

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad b \neq 0$$

- Jeśli podnosimy potęgę do jakiejś potęgi, mnożymy ze sobą wykładniki tych potęg, a podstawa pozostaje niezmieniona

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

- Jeśli podnosimy liczbę do ujemnej potęgi, zamieniamy jej mianownik z licznikiem i cały ułamek podnosimy do tej samej potęgi, ale już bez minusa

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \qquad a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} \qquad a \neq 0$$

- Każda liczba wzięta do potęgi zerowej daje nam w wyniku 1

$$a^0 = 1$$

Zadania

→ Odpowiedzi

1. Oblicz, stosując działania na potęgach:
   (a) $3^2 \cdot 3^3$
   (b) $2^2 \cdot 4^2$
   (c) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 6^{-2}$
   (d) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot 2^2$
   (e) $\left(3^9 + 25^{43} + 4,498^{323}\right)^0$
   (f) $\left(\frac{2}{4}\right)^{-2}$

2. Oblicz: $\dfrac{4^{25} \cdot (\frac{1}{2})^{-20}}{8^{11}} \cdot 2$

3. Wartością wyrażenia $\dfrac{27 \cdot 3^{-3}}{(\frac{1}{3})^{-2}}$ jest:

   (a) 1

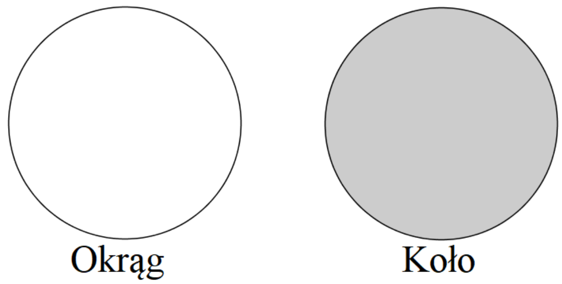
   (b) 3

   (c) $\dfrac{1}{9}$

   (d) -1

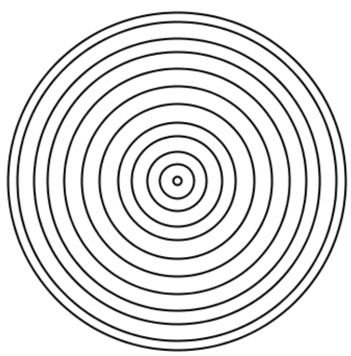
0.2 Oblicza pole koła, pierścienia kołowego, wycinka kołowego

Po pierwsze, musimy sobie wyjaśnić, czym różni się okrąg od koła. O okręgu już trochę sobie powiedzieliśmy, jest to zbiór punktów będących w takiej samej odległości r od pewnego punktu O, który nazywamy środkiem okręgu. Mimo że okrąg zakreśla pewien obszar, to do samego okręgu należą wyłącznie te punkty, które są w odległości r od jego środka. Koło obejmuje natomiast nie tylko punkty, które są odległe o r od środka okręgu i tworzą sam okrąg, a również punkty, które znajdują się między środkiem okręgu i samym okręgiem. Często koło odróżnia się od okręgu poprzez wypełnienie go kolorem. Podkreśla się dzięki temu fakt, że do koła należą również wszystkie punkty "wewnątrz" okręgu:



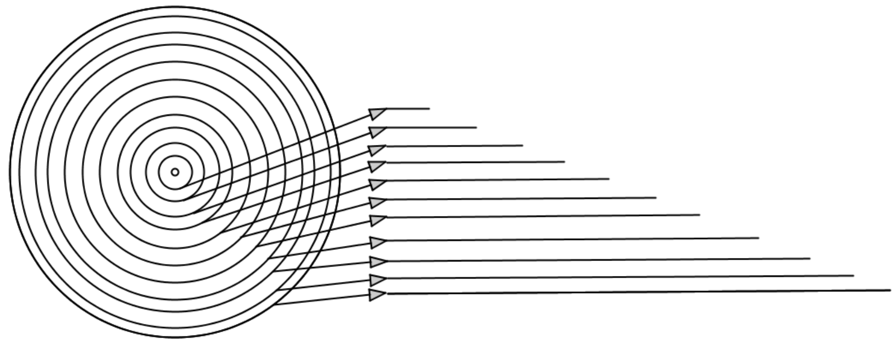
Rysunek 1: Okrąg i koło o tych samych promieniach r

Gdy mamy do czynienia z jakimś zamkniętym obszarem, to mamy również do czynienia z jego *polem* P. Polem, czyli właśnie pewnym zbiorem punktów znajdujących się wewnątrz tego zamkniętego obszaru. Jest to wielkość, dzięki której jesteśmy w stanie porównywać rozmiary figur płaskich (figur "w 2D"). Jak jednak obliczyć takie pole? Spróbujmy zabawić się w znalezienie wzoru na pole koła. Wiemy z poprzednich tematów, że długość każdego okręgu jest równa $2\pi r$. Spróbujmy więc wypełnić nasze koło okręgami o różnym promieniu:



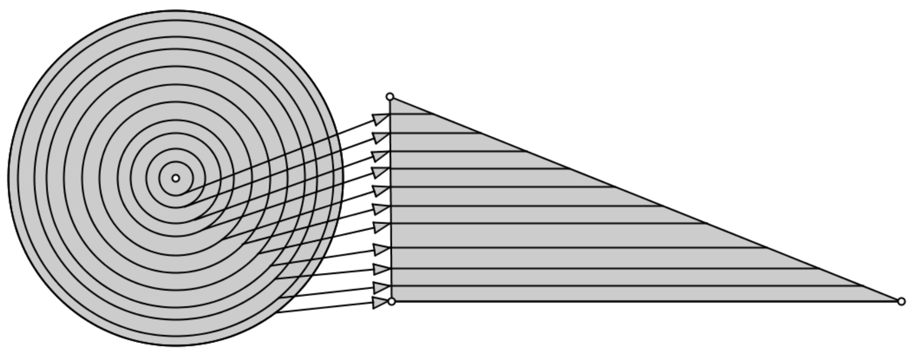
Rysunek 2: Koło, w które wpisaliśmy wiele okręgów o różnych promieniach

Oczywiście jest to niemożliwa sprawa do wykonania w praktyce, jednak w teorii możemy powiedzieć, że faktycznie wpisujemy nieskończoną ilość takich okręgów i udaje nam się wypełnić całe pole wewnątrz koła. Spróbujmy teraz zrobić następującą rzecz: wyciągamy te okręgi z wnętrza koła, rozcinamy je, tworząc odcinek o jakiejś długości L i stawiamy te odcinki jeden pod drugim od najkrótszego do najdłuższego:



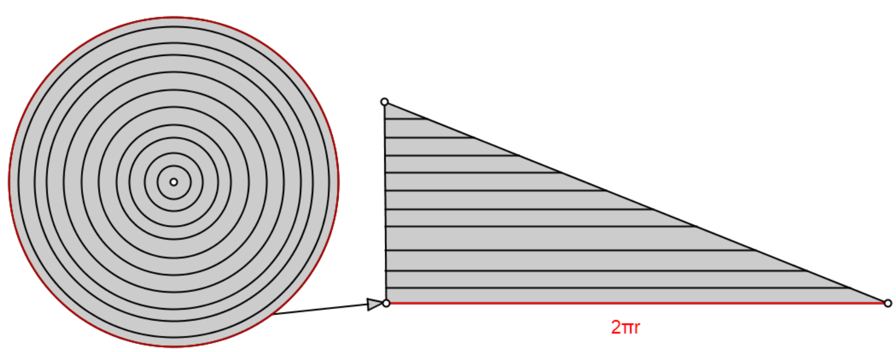
Rysunek 3: Długości wpisanych okręgów w koło postawione jeden pod drugim od najkrótszego do najdłuższego

Nie wygląda to zbyt ciekawie, ale tylko dlatego, że udało nam się wpisać wyłącznie kilka takich okręgów. Gdybyśmy jednak wpisali nieskończoną ilość okręgów i zrobili z długościami tych okręgów to samo, co powyżej, otrzymalibyśmy trójkąt prostokątny, którego pole jest identyczne z polem naszego koła:



Rysunek 4: Długości wpisanych okręgów w koło postawione jeden pod drugim od najkrótszego do najdłuższego dla teoretycznie nieskończonej liczby okręgów

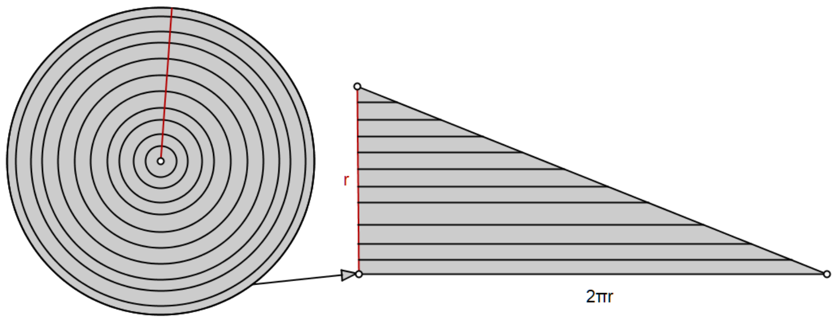
Oczywiście, aby teraz obliczyć pole tego trójkąta, musimy znać jego dwa boki (obliczanie pola trójkąta znajduje się w następnych tematach). Bardzo łatwo znajdziemy długość "dolnego" boku, ponieważ jest to odcinek równy długości najdłuższego z okręgów, czyli okręgu o promieniu równym promieniowi koła:



Rysunek 5: Jeden z boków trójkąta jest równy długości największego z okręgów, czyli okręgu o takim samym promieniu, co nasze rozpatrywane koło

$$a = 2\pi r.$$

Jaką długość ma natomiast drugi bok? Jest to odległość od okręgu o najmniejszej długości do okręgu o długości największej. W przypadku nieskończonej ilości takich okręgów ten pierwszy jest właściwie punkcikiem i leży w środku okręgu. Drugi bok jest więc odległością od środka okręgu do okręgu największego, czyli po prostu promieniem naszego koła:



Rysunek 6: Drugi bok trójkąta ma długość równą długości promienia koła

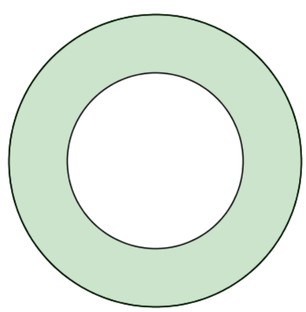
Pole koła jest równe polu naszego trójkąta, w którym podstawą jest bok $2\pi r$, a wysokością jest r. Obliczmy więc je:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r$$

$$\boxed{P = \pi r^2.} \tag{0.8}$$

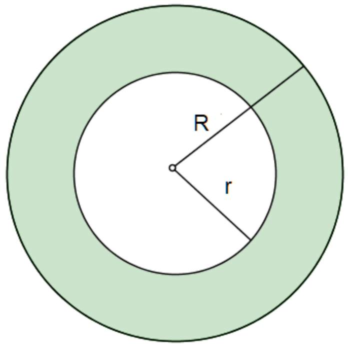
Należy jednak pamiętać, że jednostki pola to jednostki długości podniesione do kwadratu, np. cm^2. Dlaczego? Ponieważ pole powstaje poprzez wymnożenie długości przez inną długość, a więc musimy stosować tutaj jednostki długości do kwadratu. Na przykład pole koła powstaje ze wzoru $P = \pi \cdot r \cdot r$, w którym to mamy mnożenie długości promienia przez samą siebie dwa razy, więc powstaje jednostka długości do kwadratu. Celowo nie mówię tutaj konkretnie jakiej długości, ponieważ mogą to być cm^2, mogą to być m^2 i każda inna jednostka długości. Na przykład, jeśli promień danego koła wynosi 2 dm, to jego pole wynosi: $P = \pi \cdot 2\ \mathrm{dm} \cdot 2\ \mathrm{dm} = 4\pi\ \mathrm{dm}^2$.

Oczywiście pola można do siebie dodawać i od siebie odejmować. Obliczenie pola pewnych figur staje się dużo prostsze po zauważeniu, że składają się one z sumy lub różnicy pól figur, które łatwo obliczyć. Takim przykładem jest pierścień kołowy:



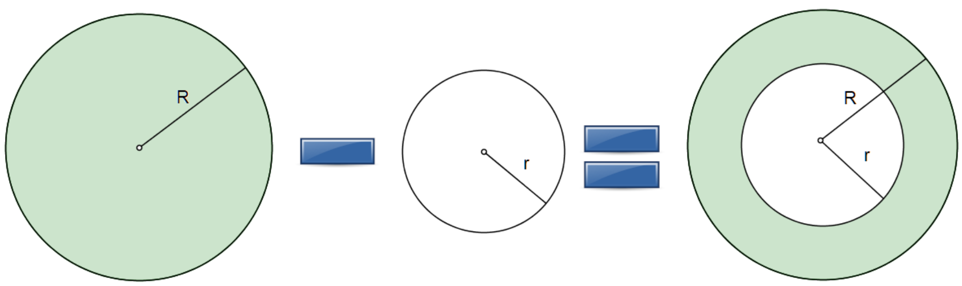
Rysunek 7: Pierścień kołowy

Jak obliczyć pole takiego pierścienia? Zauważ, że składa się on z dwóch kół: większego o promieniu R i mniejszego o promieniu r:



Rysunek 8: Pierścień kołowy

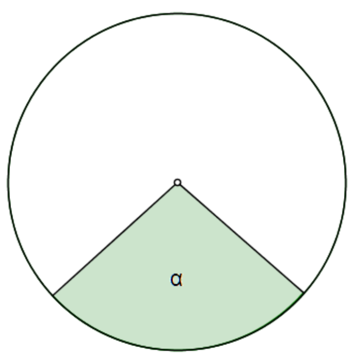
Następnie zobacz, że pole tego pierścienia jest tylko częścią większego koła, a konkretniej pole pierścienia kołowego jest niczym innym, jak polem większego koła, od którego odjęto pole mniejszego koła, stąd wyrażenie na pole pierścienia kołowego zapisujemy jako:



Rysunek 9: "Powstanie" pierścienia kołowego

$$\boxed{P = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2).} \tag{0.9}$$

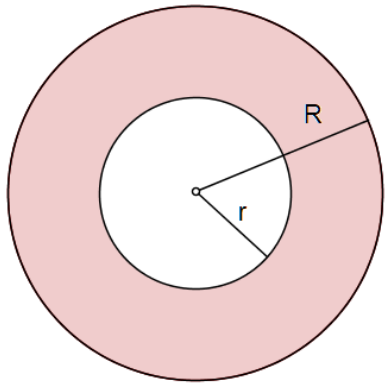
Pole wycinka kołowego liczymy natomiast analogicznie do długości łuku, czyli



Rysunek 10: Wycinek koła, którego ramiona wyznaczają kąt α

$$\boxed{P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2.} \tag{0.10}$$

Przykład 0.3 *Ile wynosi pole dużego koła o promieniu R, jeśli pole pierścienia kołowego wynosi $96\pi\ cm^2$, a promień r małego koła wynosi 2cm?*



Pole pierścienia kołowego możemy obliczyć, używając wzoru

$$P = \pi(R^2 - r^2),$$

a więc, podstawiając:

$$96\pi\ \text{cm}^2 = \pi(R^2 - (2\ \text{cm})^2) \quad / : \pi,$$

$$96\ \text{cm}^2 = R^2 - 4\ \text{cm}^2 \quad / + 4\ \text{cm}^2,$$

$$R^2 = 100\ \text{cm}^2,$$

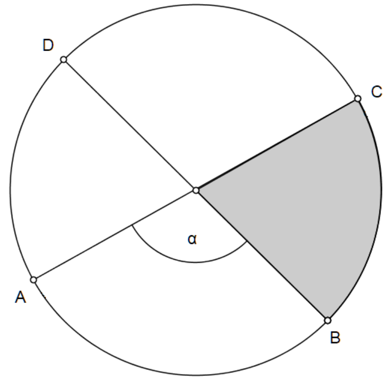
$$R = \sqrt{100\ \text{cm}^2} = 10\ \text{cm}.$$

Mając promień tego koła, możemy obliczyć jego pole w następujący sposób:

$$P = \pi R^2 = 100\pi\ \text{cm}^2.$$

Odpowiedź: Pole tego koła wynosi $100\pi\ \text{cm}^2$.

Przykład 0.4 *Oblicz pole wycinka kołowego, opartego na łuku BC, jeśli długość łuku AB jest równa $10\pi\ cm$ i stanowi to $\frac{5}{18}$ długości całego okręgu.*



Może się wydawać, że mamy zbyt mało danych w tym zadaniu, ale mamy ich w rzeczywistości wystarczająco dużo. Do obliczenia pola wycinka koła potrzebujemy miary kąta, którego ramiona wyznaczają ten łuk tego wycinka oraz promienia okręgu r lub jego całkowitej długości L. Nasze dane dotyczą jednak łuku zawartego między punktami AB. Mamy jego długość oraz stosunek, w jakim ta długość jest z długością całego okręgu L. Obliczmy więc całkowite L z tej zależności:

$$l = \frac{5}{18}L,$$

$$10\pi \text{ cm} = \frac{5}{18}L \quad / \cdot 18,$$

$$180\pi \text{ cm} = 5L \quad / : 5,$$

$$L = 36\pi \text{ cm},$$

a więc także:

$$r = \frac{L}{2\pi} = \frac{36\pi \text{ cm}}{2\pi} = 18 \text{ cm}.$$

Potrzebujemy jeszcze miary naszego kąta. Zauważ, że jest to kąt przyległy do kąta α, więc suma ich miar jest równa $180°$. Spróbujmy odnaleźć najpierw miarę kąta α. Szukamy w naszych wzorach jakiejś zależności, gdzie się ta miara pojawia. Jest ona oczywiście we wzorze na długość łuku $l = \frac{\alpha}{360°}L$. Znamy l, znamy L, więc bardzo łatwo wyliczymy z tego miarę kąta α:

$$l = \frac{\alpha}{360°}L,$$

$$10\pi \text{ cm} = \frac{\alpha}{360°} \cdot 36\pi \text{ cm},$$

$$10\pi \text{ cm} = \frac{\alpha}{10°} \cdot 1\pi \text{ cm} \quad / : \pi \text{ cm},$$

$$10 = \frac{\alpha}{10°} \quad / \cdot 10°,$$

$$\alpha = 100°.$$

Można to było też wywnioskować w nieco inny sposób. Stosunek miary kąta α do kąta pełnego o mierze $360°$ jest taki sam, jak stosunek długości łuku AB do długości pełnego okręgu. Wiemy z treści zadania, że ten drugi jest równy $\frac{5}{18}$, więc $\alpha = \frac{5}{18} \cdot 360° = 100°$.

Nasz wycinek koła jest jednak ograniczony ramionami kąta przyległego do kąta α, nazwijmy sobie go kątem β. Jeśli tak, to suma miar tych kątów powinna nam dać $180°$. Obliczmy z tej zależności miarę kąta β:

$$\alpha + \beta = 180° \quad / - \alpha,$$

$$\beta = 180° - \alpha = 180° - 100° = 80°.$$

Mając już promień koła r oraz kąt, który wyznacza łuk naszego wycinka koła, jesteśmy w stanie obliczyć pole wycinka koła, korzystając ze wzoru:

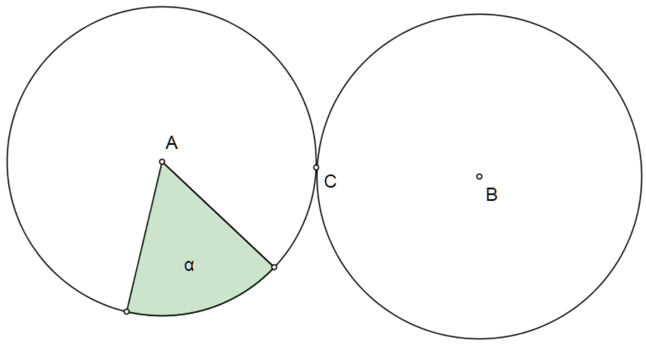
$$P = \frac{\beta}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{80°}{360°} \cdot \pi(18 \text{ cm})^2 = \frac{2}{9} \cdot 324\pi \text{ cm}^2 = 72\pi \text{ cm}^2.$$

Odpowiedź: Pole tego wycinka koła wynosi 72π cm^2.

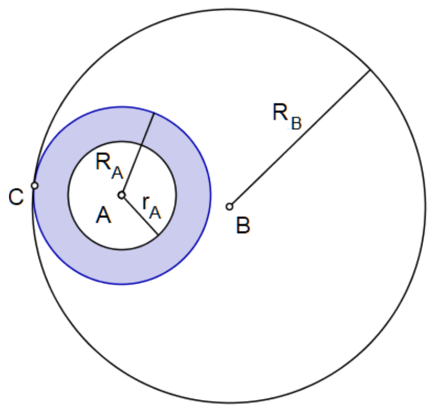
Zadania

→ Odpowiedzi

1. Koło o środku A jest styczne zewnętrznie do koła o środku B. Oblicz pole zaznaczonego wycinka kołowego, jeśli $\alpha = 60°$, $|AB| = 13$ cm oraz $r_B = 7$ cm (r_B – promień koła o środku B)



2. Okrąg o promieniu R_A i środku A jest styczny wewnętrznie w punkcie C z okręgiem o promieniu R_B i środku B. Promień R_A jest także promieniem większego koła w pierścieniu kołowym o środku A, w którym to promieniem mniejszego koła jest r_A. Oblicz pole pierścienia kołowego, jeśli $r_A = 2$ cm, $R_B = 10$ cm oraz $|CB| = 7$ cm.



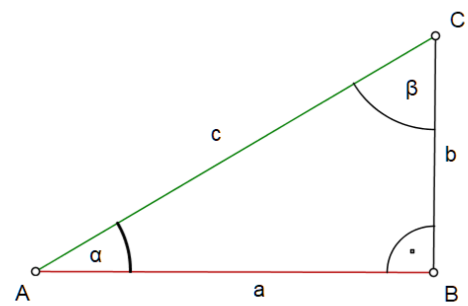
1 Trygonometria

Uczeń:

1.1 Wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od $0°$ do $180°$; Korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora); Oblicza miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo - korzystając z tablic lub kalkulatora - przybliżoną);

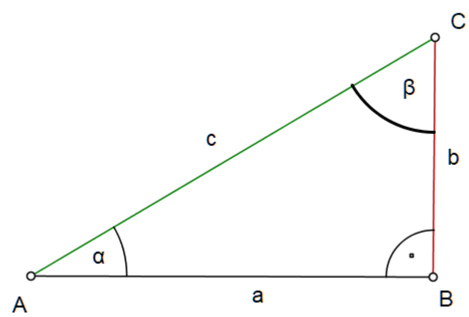
W trójkącie prostokątnym wyróżniamy szereg bardzo ważnych zależności między długościami jego boków:

- Stosunek długości przyprostokątnej wychodzącej z danego kąta do długości przeciwprostokątnej nazywamy *cosinusem* tego kąta



Rysunek 11: Bok a jest przyprostokątną wychodzącą z wierzchołka A kąta α, a bok c jest przeciwprostokątną. Stosunek długości boku a do długości boku c jest cosinusem kąta α, który oznaczamy przez $\cos\alpha$.

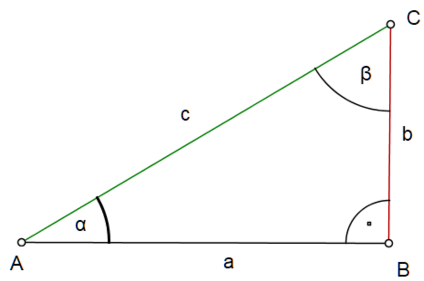
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a}{c}.} \tag{1.1}$$



Rysunek 12: Bok b jest przyprostokątną wychodzącą z wierzchołka C kąta β, a bok c jest przeciwprostokątną. Stosunek długości boku b do długości boku c jest cosinusem kąta β, który oznaczamy przez $\cos\beta$.

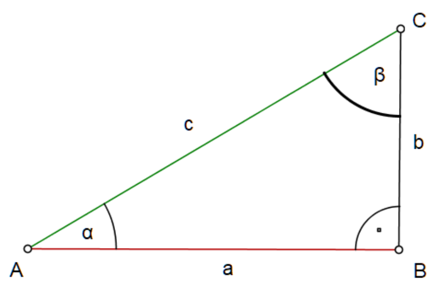
$$\boxed{\cos\beta = \frac{b}{c}.} \tag{1.2}$$

- Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko wierzchołka danego kąta do długości przeciwprostokątnej nazywamy *sinusem* tego kąta:



Rysunek 13: Bok b jest przyprostokątną leżącą naprzeciwko wierzchołka A kąta α, a bok c jest przeciwprostokątną. Stosunek długości boku b do długości boku c jest sinusem kąta α, który oznaczamy przez $\sin\alpha$.

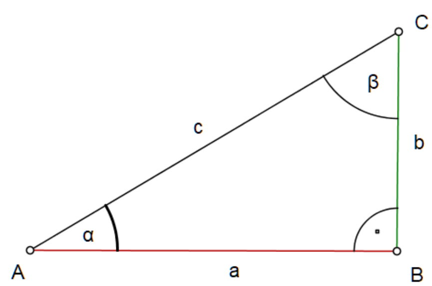
$$\boxed{\sin\alpha = \frac{b}{c}.} \tag{1.3}$$



Rysunek 14: Bok a jest przyprostokątną leżącą naprzeciwko wierzchołka C kąta β, a bok c jest przeciwprostokątną. Stosunek długości boku a do długości boku c jest sinusem kąta β, który oznaczamy przez $\sin\beta$.

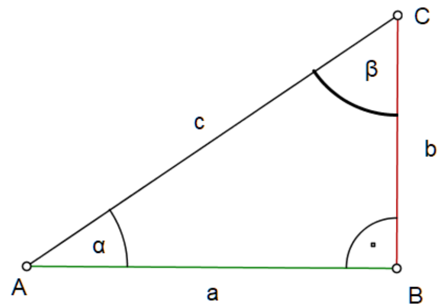
$$\boxed{\sin\beta = \frac{a}{c}.} \tag{1.4}$$

- Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko danego kąta do długości przyprostokątnej wychodzącej z niego nazywamy *tangensem* tego kąta



Rysunek 15: Bok a jest przyprostokątną wychodzącą z wierzchołka A kąta α, a bok b jest przyprostokątną leżącą naprzeciwko tego kąta. Stosunek długości boku b do długości boku a jest więc tangensem kąta α, który oznaczamy przez $\operatorname{tg}\alpha$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}.} \tag{1.5}$$



Rysunek 16: Bok b jest przyprostokątną wychodzącą z wierzchołka C kąta β, a bok a jest przyprostokątną leżącą naprzeciwko tego kąta. Stosunek długości boku a do długości boku b jest więc tangensem kąta β, który oznaczamy przez $\operatorname{tg} \beta$

$$\boxed{\operatorname{tg} \beta = \frac{a}{b}.} \tag{1.6}$$

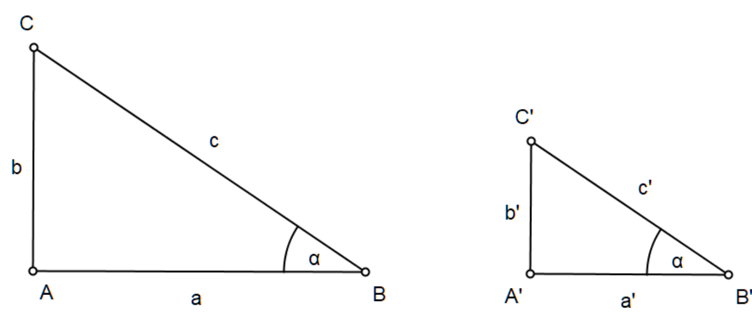
Przejdziemy zaraz do szerszego omawiania właściwości tychże zależności, jednak najpierw przybliżymy sobie jeszcze ich genezę.

Najpierw sprawdźmy sobie, czy te funkcje trygonometryczne, jak je też nazywamy, są różne w trójkątach podobnych.

Dla trójkątów podobnych stosunki długości odpowiadających sobie boków są równe jakiejś stałej liczbie k:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k.$$

Trójkąty podobne mają również takie same miary odpowiadających sobie kątów. Obliczmy więc cosinus jakiegoś kąta α zarówno w jednym, jak i w drugim trójkącie:



Rysunek 17: Trójkąty prostokątne podobne

$$\cos_1 \alpha = \frac{a}{c},$$

$$\cos_2 \alpha = \frac{a'}{c'},$$

a następnie obliczmy stosunek $\cos_1 \alpha$ do $\cos_2 \alpha$:

$$\frac{\cos_1 \alpha}{\cos_2 \alpha} = \frac{a}{c} : \frac{a'}{c'} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c'}{a'}.$$

Z mnożenia po prawej stronie równania możemy utworzyć dwa ułamki:

$$\frac{\cos_1 \alpha}{\cos_2 \alpha} = \frac{a \cdot c'}{c \cdot a'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{c'}{c}.$$

Zobaczmy teraz na zależność, jaką wypisaliśmy z racji tego, że trójkąty te są podobne. Dowiadujemy się z niej, że pierwszy ułamek z równania powyżej jest równy k, natomiast drugi jest równy $\frac{1}{k}$!:

$$\frac{\cos_1 \alpha}{\cos_2 \alpha} = k \cdot \frac{1}{k} = 1,$$

stąd:

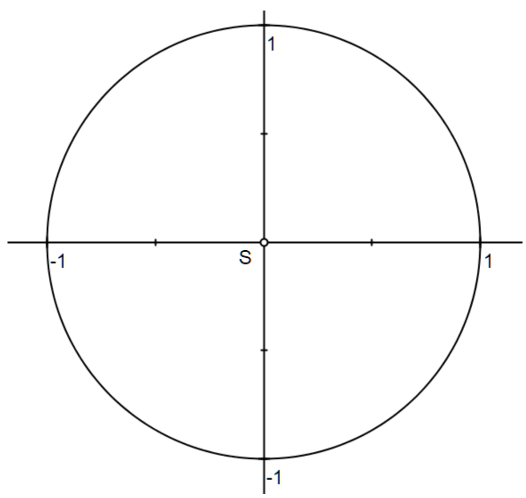
$$\frac{\cos_1 \alpha}{\cos_2 \alpha} = 1.$$

Wniosek: funkcje trygonometryczne odpowiadających sobie kątów w trójkątach prostokątnych podobnych mają tę samą wartość! Trójkąty te mogłyby mieć miliard razy inną wielkość, ale funkcje trygonometryczne odpowiadających sobie kątów w tych trójkątach są równe!

Skoro tak, to może pokusimy się o pewną wizualizację, w jaki sposób można dojść zarówno do samych wartości tych funkcji dla różnch kątów, jak i wielu zależności i właściwości?

Na początek narysujmy na układzie współrzędnych okrąg o następujących właściwościach:

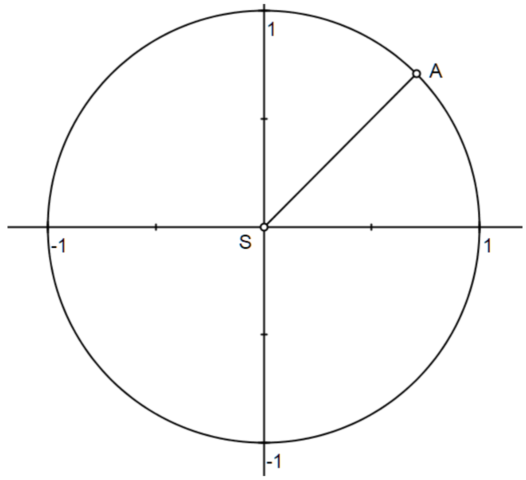
- Jego środek S znajduje się dokładnie w środku układu współrzędnych, a więc w punkcie $S = (0, 0)$
- Jego promień wynosi dokładnie 1



Rysunek 18: Okrąg o promieniu 1 i środku w punkcie $S = (0, 0)$

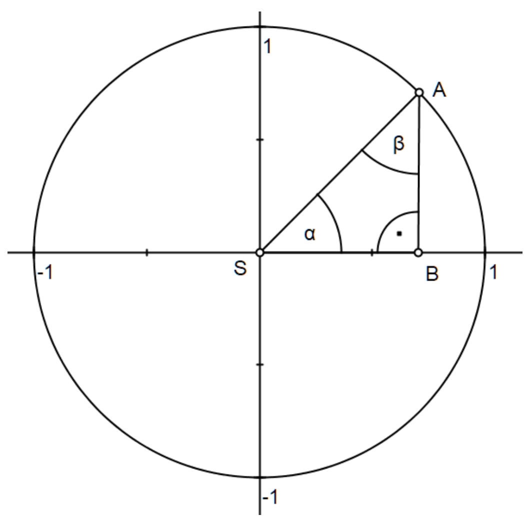
Taki okrąg nazywamy *okręgiem jednostkowym.*

Zaznaczmy następnie na tym okręgu jakiś punkt A i połączmy go ze środkiem tego okręgu:



Rysunek 19: Środek S okręgu połączony odcinkiem z pewnym punktem A na tym okręgu

Teraz zaznaczmy punkt B, który znajduje się na osi X i leży dokładnie pod punktem A, a więc jest rzutem punktu A na oś X. Połączmy go z pozostałymi punktami:



Rysunek 20: Okrąg o promieniu 1 i środku w punkcie $S = (0, 0)$

Otrzymaliśmy trójkąt prostokątny SBA o kątach α oraz β. Spróbujmy teraz obliczyć cosinus, sinus i tangens kąta α tego trójkąta:

$$\cos\alpha = \frac{|SB|}{|SA|},$$

$$\sin\alpha = \frac{|AB|}{|SA|},$$

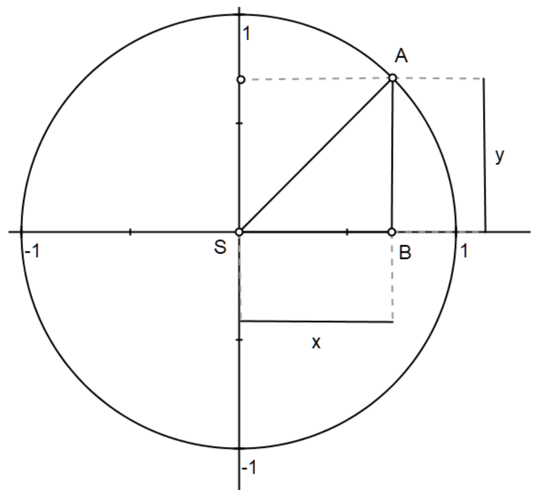
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|AB|}{|SB|}.$$

Odcinek SA, czyli przeciwprostokątna tego trójkąta, jest jednocześnie promieniem naszego okręgu, a więc jej długość jest równa 1:

$$\cos\alpha = \frac{|SB|}{|SA|} = \frac{|SB|}{1} = |SB|,$$

$$\sin\alpha = \frac{|AB|}{|SA|} = \frac{|AB|}{1} = |AB|.$$

To nie koniec. Zauważ, że długość tych boków jest równa współrzędnym punktu A! Odcinek SB ma długość równą współrzędnej x-owej, a odcinek AB ma długość współrzędnej y-owej! Daje nam to następujące zależności:



Rysunek 21: Długość boku SB jest równa współrzędnej x-owej punktu A, natomiast długość boku BA jest równa y-owej współrzędnej tego punktu

$$\boxed{\cos\alpha = |SB| = x_A,} \tag{1.7}$$

$$\boxed{\sin\alpha = |AB| = y_A,} \tag{1.8}$$

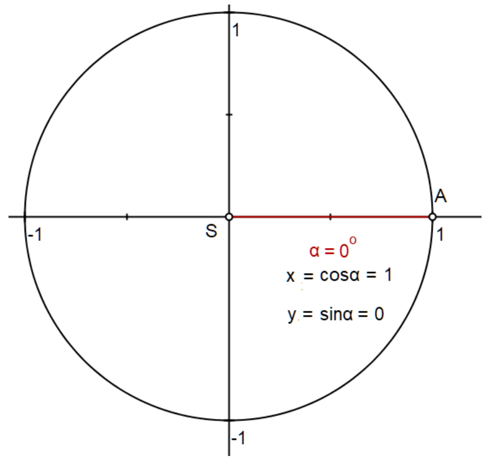
$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{|AB|}{|SB|} = \frac{y_A}{x_A},} \tag{1.9}$$

gdzie $|SB|$ i $|AB|$ to długości odpowiednich odcinków, a x_A oraz y_A to współrzędne danego punktu A.

Dzięki temu możemy właściwie zapomnieć już o bokach i całym tym trójkącie. Wystarczy bowiem, że będziemy zmieniać położenie punktu A na okręgu, co będzie równoważne ze zmianą kąta α, a następnie odczytywać jego współrzędne x oraz y, ponieważ da nam to w pełni informacje o cosinusie, sinusie i tangensie tego kąta w absolutnie każdym trójkącie prostokątnym! Gdy współrzędna x dla danego kąta wyniesie – powiedzmy – 0,57, to w każdym trójkącie prostokątnym cosinus kąta o takiej mierze jest równy 0,57!

Spróbujmy więc znaleźć przykładowe wartości sinusa, cosinusa i tangensa dla różnych wartości naszego kąta α (**Uwaga.** Kąt α to kąt między odcinkiem SA a częścią osi X leżącą po prawej stronie początku układu współrzędnych, czyli tam, gdzie leżał punkt B):

Gdy kąt α jest równy $0°$, punkt A leży na osi X. Jego współrzędna x-owa jest równa 1, a współrzędna y-owa jest równa 0. Z tego względu cosinus kąta $0°$ jest równy 1, sinus kąta $0°$ jest równy 0, a tangens kąta $0°$ jest równy $\frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$:



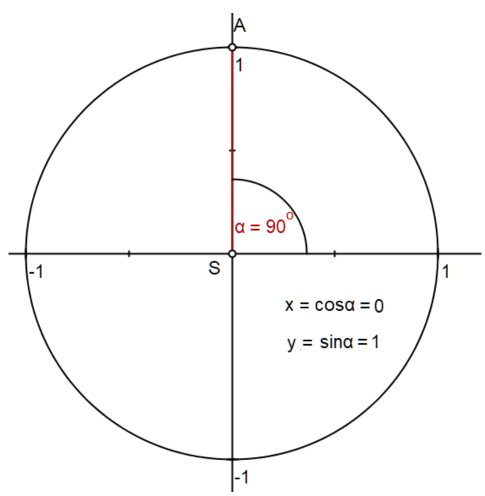
Rysunek 22: Kąt α równy $0°$

$$\boxed{\cos 0° = 1,} \tag{1.10}$$

$$\boxed{\sin 0° = 0,} \tag{1.11}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 0° = 0.} \tag{1.12}$$

Gdy kąt α jest równy $90°$, punkt A leży na osi Y. Jego współrzędna x-owa jest równa 0, a współrzędna y-owa jest równa 1. Z tego powodu cosinus kąta $90°$ jest równy 0, sinus kąta $90°$ jest równy 1, a tangensa tego kąta nie jesteśmy w stanie policzyć, ponieważ $\operatorname{tg} = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{1}{0}$, a nie możemy dzielić przez zero!:



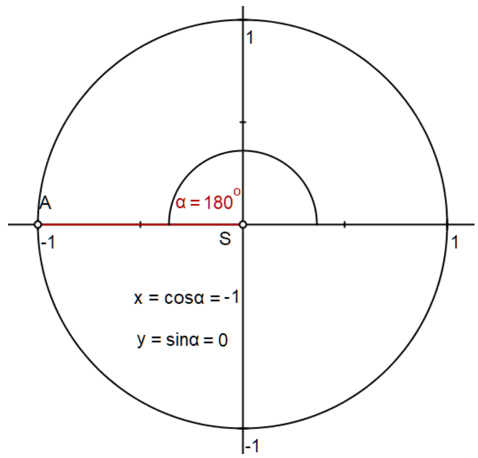
Rysunek 23: Kąt α równy $90°$

$$\boxed{\cos 90^\circ = 0,} \tag{1.13}$$

$$\boxed{\sin 90^\circ = 1,} \tag{1.14}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 90^\circ = -.} \tag{1.15}$$

Gdy kąt α jest równy 180°, punkt A leży na osi X, ale po stronie, gdzie wartości x są ujemne. Jego współrzędna x-owa jest z tego względu równa -1, a współrzędna y-owa jest równa 0. Cosinus kąta 180° jest więc równy -1, sinus kąta 180° jest równy 0, a tangens tego kąta jest równy $\frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$:



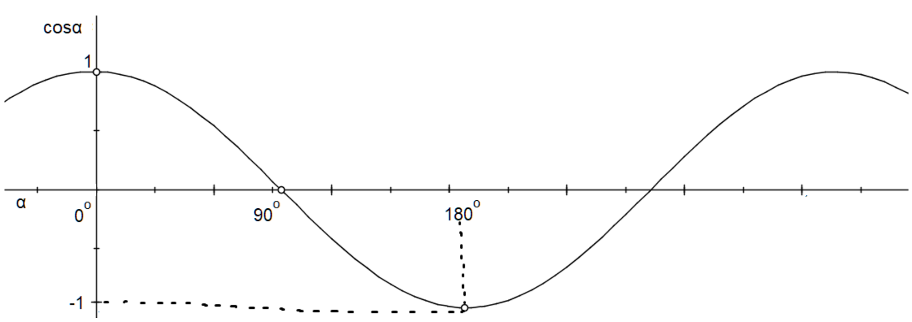
Rysunek 24: Kąt α równy 180°

$$\boxed{\cos 180^\circ = -1,} \tag{1.16}$$

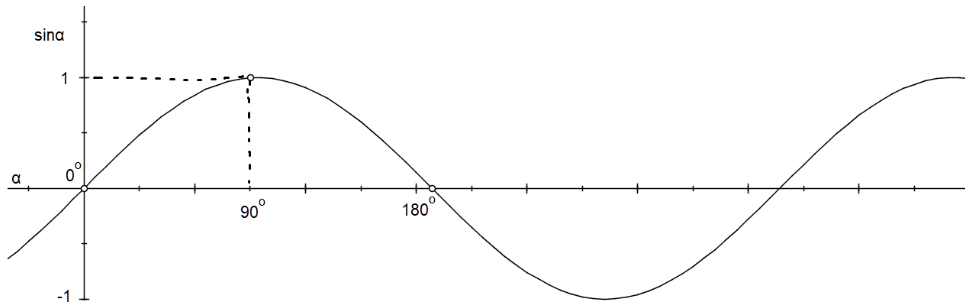
$$\boxed{\sin 180^\circ = 0,} \tag{1.17}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 180^\circ = 0.} \tag{1.18}$$

I właśnie w taki sposób jesteśmy w stanie otrzymać wartość cosinusa, sinusa i tangensa każdego możliwego kąta. Dlaczego więc policzyliśmy sobie tylko te trzy? Tą metodą tylko te trzy wartości są łatwe do zauważenia "gołym okiem". Co byśmy natomiast dostali za wykresy, jeśli byśmy obliczyli cosinus oraz sinus dla każdej możliwej wartości kata α? Oto, jak wyglądają funkcje cosinus i sinus na wykresie:



Rysunek 25: Wykres funkcji $\cos\alpha$ w zależności od miary kąta α. Zaznaczone punkty są tymi, które obliczyliśmy sobie wcześniej



Rysunek 26: Wykres funkcji $\sin \alpha$ w zależności od miary kąta α. Zaznaczone punkty są tymi, które obliczyliśmy sobie wcześniej

(wykresy te są trochę dziwne, ponieważ oś X trzeba było edytować w nich ręcznie. Programy rysujące takie funkcje wykorzystują najczęściej nie stopnie, a miarę łukową, której to na podstawie nie omawiamy. Wykres tangensa sobie natomiast odpuścimy, ponieważ jest on dosyć... specyficzny i mógłby pewnie wielu osobom sprawić ból głowy)

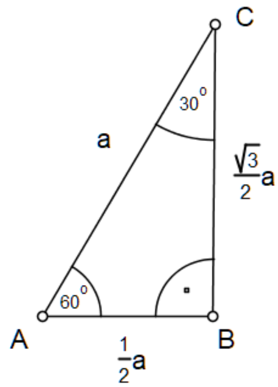
Od razu widać, dlaczego funkcje trygonometryczne nazywamy *funkcjami okresowymi*. Co pewną wartość argumentów zaczynają one bowiem wyglądać dokładnie tak samo. Jest to spowodowane tym, że gdybyśmy zrobili całe jedno "okrążenie" naszego okręgu, czyli zakreślili kąt α równy $360°$, to następne zwiększanie kąta byłoby równe z tym, jakbyśmy dopiero co zaczynali go zwiększać od kąta $0°$! Warto jeszcze zaznaczyć, że sinus i cosinus nie może być mniejszy od -1 oraz większy od 1! Jeśli wrócimy do naszego okręgu, to zarówno współrzędna x-owa, jak i y-owa punktu A nie może być mniejsza od -1 oraz większa od 1. Widać to również na powyższych wykresach, gdzie "zawracają" one przy tych wartościach funkcji.

Jak więc uczniowie przy rozwiązywaniu zadań na maturze mają sobie radzić z cosinusami i sinusami, skoro trudno wyliczyć niektóre z nich? Opcje są trzy:

- Jeśli dane są długości boków jakiegoś trójkąta prostokątnego, to obliczamy wartość danej funkcji trygonometrycznej danego kąta poprzez obliczenie stosunku odpowiednich boków
- Jeśli podana jest miara danego kąta, to możemy skorzystać z tablicy wartości trygonometrycznych. Taka tablica znajduje się na karcie wzorów, którą dostajemy na egzaminie maturalnym. Wystarczy tylko odnaleźć odpowiednią miarę kąta i odczytać, jaką wartość (najczęściej przybliżoną) przyjmuje jego sinus, cosinus lub tangens. W zadaniach, gdzie potrzebujemy konkretnej wartości danego kąta, najczęściej będzie chodziło o miary kątów, które podane są w tabelce i których wartości funkcji trygonometrycznych można wyrazić w nieco łatwiejszy sposób. W przypadku zadań z przedziałami miar kątów musimy natomiast wziąć pod uwagę całą tablicę wartości funkcji trygonometrycznych
- Jeśli podano wystarczającą ilość informacji w zadaniu, np. jest podana wartość innej funkcji trygonometrycznej, to wartość naszej szukanej funkcji trygonometrycznej jesteśmy w stanie obliczyć dzięki wykorzystaniu zależności między tymi funkcjami. Poznamy je w następnym temacie.

Pamiętajmy, że również bardzo często możemy wykorzystać zależności w trójkącie $60°, 30°, 90°$ oraz trójkącie $45°, 45°, 90°$. Przejdziemy teraz do omówienia szerzej tego zagadnienia.

Obliczyliśmy już sobie parę wartości cosinus, sinus i tangens, które wynikały z naszych działań na okręgu jednostkowym. Czy są jeszcze jakieś kąty, których funkcje trygonometryczne obliczymy w łatwy sposób? Tak, i aby tego dokonać, musimy się cofnąć do trójkąta o kątach $30°$, $60°$, $90°$, a także do trójkąta o kątach $45°$, $45°$, $90°$. Zacznijmy może z tym pierwszym.



Rysunek 27: Trójkąt prostokątny o kątach 30°, 60°, 90°

Użyjemy tego trójkąta w celu obliczenia wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° oraz 60°. Oczywiście w każdym trójkącie prostokątnym funkcje trygonometryczne takiego kąta będą miały tę samą wartość. Na powyższej ilustracji przypomnieliśmy zależności między długościami boków w tym trójkącie, aby ułatwić nam obliczenia.

Zacznijmy więc od kąta 60°:

$$\cos 60^\circ = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2}a : a = \frac{1}{2},$$

$$\sin 60^\circ = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}a : a = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{1}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{2}a : \frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}.$$

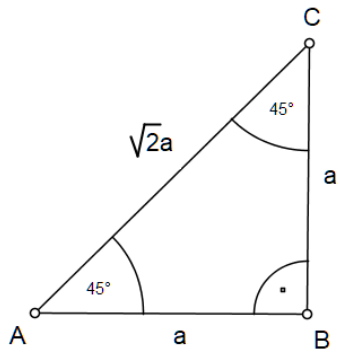
A następnie przejdźmy do kąta 30°:

$$\cos 30^\circ = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}a : a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2}a : a = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{2}a : \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Teraz spróbujmy użyć trójkąta o kątach 45°, 45°, 90°, aby obliczyć funkcje trygonometryczne dla kąta 45°. Przypomnijmy sobie taki trójkąt oraz zależności między długościami jego boków:



Rysunek 28: Trójkąt prostokątny o kątach 45°, 45°, 90°

$$\cos 45° = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin 45° = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

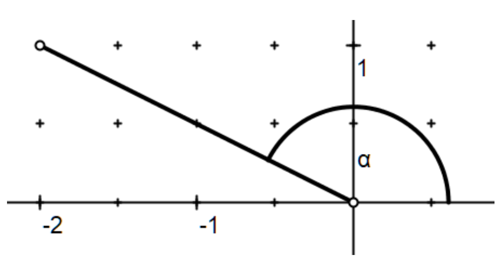
$$\operatorname{tg} 45° = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{a}{a} = 1.$$

I tak oto doszliśmy do momentu, w którym możemy utworzyć tabelkę widzianą chyba przez każdego przynajmniej parę razy. Stwórzmy tabelkę, w której wypiszemy wartość funkcji cosinus, sinus oraz tangens dla kątów 0°, 45°, 60°, 90° oraz 180°:

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0

Pamiętajcie, że ta tabelka jest też w karcie wzorów!

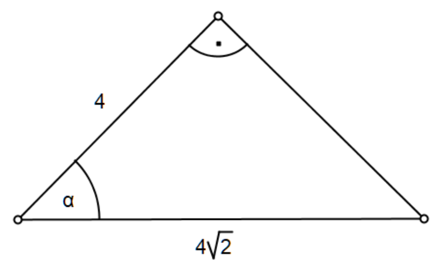
Przykład 1.1 *Ile jest równy tangens kąta α?*



Współrzędna x-owa punktu jest równa -2, natomiast współrzędna y-owa jest równa 1, stąd:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

Przykład 1.2 *Ile wynosi miara kąta α?*



Miara kąta α jest równa $45°$. Można to wywnioskować, licząc cosinus jego kąta lub zauważyć zależność między długościami podanych boków.

Przykład 1.3 *Wartość wyrażenia* $\dfrac{\sin^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\log_6 9 + \log_6 4}$ *dla* $\alpha = 35°$ *mieści się w przedziale:*

(a) (0.10, 0.13)

(b) (0.07, 0.09)

(c) (0.14, 0.15)

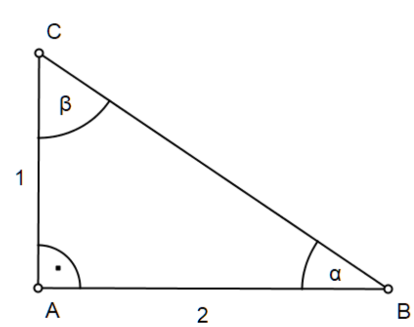
(d) (0.16, 0.17)

Zaglądamy do tablic z wartościami funkcji trygonometrycznych i odczytujemy wartości $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ dla kąta $35°$. Przy zaokrągleniu do drugiej liczby po przecinku (takie zaokrąglenie jest najczęściej w zupełności wystarczające) otrzymujemy $\sin 35° \approx 0{,}57$ oraz $\operatorname{tg} 35° \approx 0{,}7$. Obliczamy następnie przybliżoną wartość naszego wyrażenia dla podanych wartości:

$$\frac{\sin^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\log_6 9 \cdot \log_6 4} \approx \frac{(0{,}57)^2 \cdot 0{,}7}{\log_6 (9 \cdot 4)} \approx \frac{0{,}33 \cdot 0{,}7}{\log_6 36} \approx \frac{0{,}23}{2} = 0{,}115.$$

Prawidłową odpowiedzią jest odpowiedź (a).

Przykład 1.4 *Oblicz wartość wyrażenia* $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha}$ *dla kątów w poniższym trójkącie ABC:*



Obliczmy sobie najpierw wartość przeciwprostokątnej tego trójkąta:

$$1^2 + 2^2 = |CB|^2,$$

$$|CB|^2 = 5,$$

$$|CB| = \sqrt{5},$$

a następnie obliczmy wartości funkcji, które występują w zadaniu:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2},$$

$$\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

I obliczmy nasze wyrażenie:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2}.$$

Oczywiście, jeśli ktoś wcześniej zauważył, że $\cos \alpha$ jest równy $\sin \beta$, to mógł to zadanie zrobić dużo szybciej.

Przykład 1.5 *Dla pewnego kąta α zachodzi: $2 = \frac{5 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2}$. Zaznacz poprawny przedział, w którym znajduje się miara kąta α:*

(a) $35° < \alpha < 40°$

(b) $63° < \alpha < 65°$

(c) $50° < \alpha < 55°$

(d) $80° < \alpha < 82°$

Obliczmy najpierw, ile wynosi $\operatorname{tg} \alpha$ z naszego wyrażenia:

$$2 = \frac{5 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2} \quad / \cdot 2,$$

$$4 = 5 \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad / : 5,$$

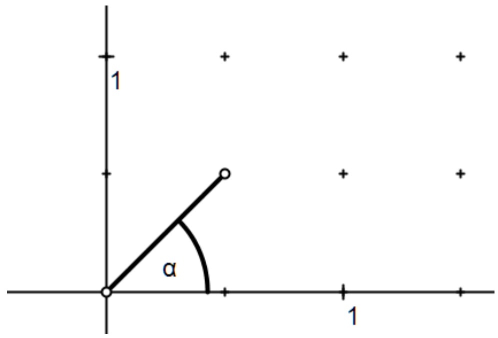
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0{,}8.$$

Wyciągamy następnie kartę wzorów i szukamy w niej, jakiego kąta tangens jest równy około 0,8. Odczytujemy z niej, że jest to kąt jakoś między 53 a 54°, stąd poprawną odpowiedzią jest odpowiedź (c).

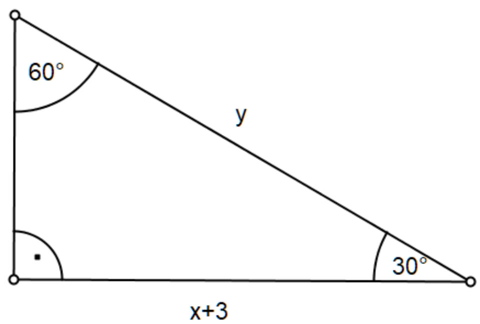
Zadania

→ Odpowiedzi

1. Ile wynosi $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$ dla poniższego kąta α?



2. Zależność x od y wynikająca z poniższego rysunku jest równa:



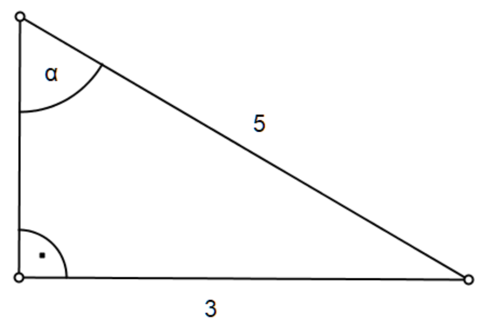
   (a) $x = \dfrac{y+3}{2}$

   (b) $x = \dfrac{y-3}{2}$

   (c) $x = \dfrac{\sqrt{3}y+6}{2}$

   (d) $x = \dfrac{\sqrt{3}y-6}{2}$

3. Zaznacz prawidłowy przedział, w którym znajduje się miara kąta α:



(a) $20° < \alpha < 25°$

(b) $32° < \alpha < 40°$

(c) $10° < \alpha < 15°$

(d) $41° < \alpha < 46°$

4. Zaznacz przedział, w którym znajduje się wartość x obliczona z równania $-29x + 2\sin\alpha = (\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 5)$, jeśli kąt α wynosi $70°$:

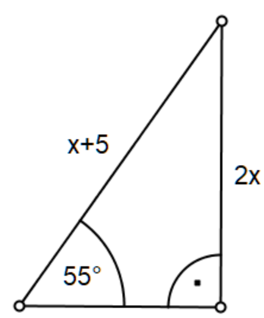
(a) (0.2, 0.4)

(b) (1.3, 1.6)

(c) (0.8, 1.1)

(d) (1.8, 2.2)

5. Zaznacz przedział, do którego należy wartość x:



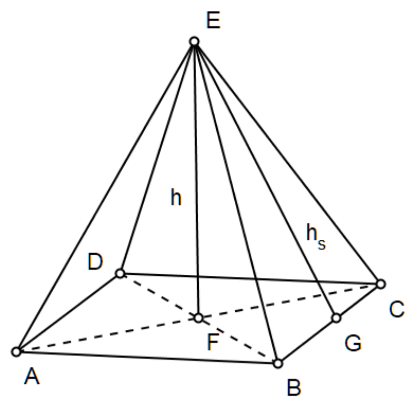
(a) (2, 6)

(b) (7, 9)

(c) (0, 2)

(d) (10, 12)

6. Zaznacz przedział, w którym znajduje się wartość stosunku długości wysokości h stożka do wysokości h_s ściany bocznej, jeśli kąt nachylenia wysokości ściany bocznej do pola powierzchni podstawy stożka jest równy $39°$:



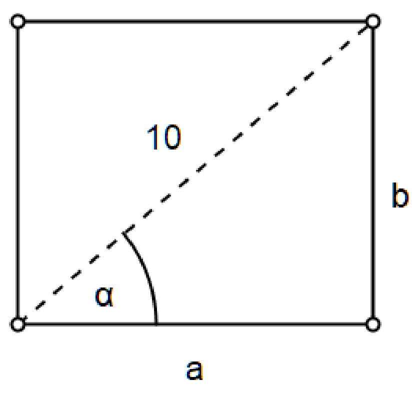
(a) (0, 0.4)

(b) (0.5, 0.8)

(c) (0.9, 1.3)

(d) (1.4, 1.7)

7. Wyznacz przybliżoną wartość pola poniższego prostokąta, wiedząc, że $\cos\alpha \approx 0{,}75$ oraz $\sin\alpha \approx 0{,}66$.



0.1

→ Powrót do zadań

1.

(a)

$$3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243.$$

(b)

$$2^2 \cdot 4^2 = (2 \cdot 4)^2 = 8^2 = 64.$$

(c)

$$2^3 \cdot 3^3 \cdot 6^{-2} = (2 \cdot 3)^3 \cdot 6^{-2} = 6^3 \cdot 6^{-2} = 6^{3+(-2)} = 6^1 = 6.$$

(d)

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot 2^2 = \frac{3^3}{2^3} \cdot 2^2 = \frac{3^3 \cdot 2^2}{2^3} = 3^3 \cdot \frac{2^2}{2^3} = 3^3 \cdot 2^{-1} = \frac{3^3}{2^1} = \frac{3^3}{2} = \frac{27}{2}.$$

(e)

$$\left(3^9 + 25^{43} + 4,498^{323}\right)^0 = 1.$$

(f)

$$\left(\frac{2}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = \frac{2^2}{1^2} = \frac{4}{1} = 4.$$

2. W takich zadaniach ważnym jest, abyśmy doprowadzili poszczególne wyrazy do takiej postaci, w której możemy skorzystać z działań na potęgach. Najczęściej taką postacią jest taka sama podstawa potęgi w każdym z tych wyrazów. W naszym przypadku najlepiej sprowadzić wszystkie potęgi do takich, których podstawa jest równa 2:

$$\frac{4^{25} \cdot (\frac{1}{2})^{-20}}{8^{24}} \cdot 2 = \frac{(2^2)^{25} \cdot (2^{-1})^{-20}}{(2^3)^{24}} \cdot 2 = \frac{2^{50} \cdot 2^{20}}{2^{72}} \cdot 2 = \frac{2^{70}}{2^{72}} \cdot 2 = 2^{-2} \cdot 2 = 2^{-2} \cdot 2^1 = 2^{-1} = \frac{1}{2}.$$

3. Oczywiście najpierw zamieniamy wszystkie potęgi na takie o podstawie 3 i obliczamy wartość naszego wyrażenia:

$$\frac{27 \cdot 3^{-3}}{(\frac{1}{3})^{-2}} = \frac{3^3 \cdot 3^{-3}}{3^2} = \frac{3^{3+(-3)}}{9} = \frac{3^0}{9} = \frac{1}{9}.$$

Prawidłową odpowiedzią jest więc odpowiedź (c).

0.2

→ Powrót do zadań

1. Do obliczenia pola wycinka koła potrzebujemy jeszcze promienia koła o środku A, czyli r_A. Długość $|AC|$ jest równa sumie promieni r_A oraz r_B, ponieważ są to koła styczne zewnętrznie, stąd:

$$|AB| = r_A + r_B \quad / - r_B,$$

$$r_A = |AB| - r_B$$

podstawiając:

$$r_A = 13 \text{ cm} - 7 \text{ cm} = 6 \text{ cm}.$$

Mamy już wszystkie dane potrzebne do obliczenia pola wycinka koła:

$$l = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (6^2 \text{ cm})^2 = \frac{1}{6} \cdot 36\pi \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2.$$

Odpowiedź: Pole tego wycinka koła wynosi 6π cm^2.

2. Do obliczenia pola pierścienia koła brakuje nam tylko długości promienia R_A. Okrąg o środku B styka się wewnętrznie z okręgiem o środku A i promieniu R_A, stąd odcinek $|CB|$ jest równy różnicy promienia R_B i R_A:

$$|CB| = R_B - R_A \quad / + R_A,$$

$$R_A + |CB| = R_B \quad / - R_A,$$

$$R_A = R_B - |CB|.$$

Podstawiając, otrzymujemy:

$$R_A = 15 \text{ cm} - 10 \text{ cm} = 5 \text{ cm}.$$

Obliczmy teraz pole naszego pierścienia kołowego:

$$P = \pi(R_A^2 - r_A^2) = \pi((5 \text{ cm})^2 - (2 \text{ cm})^2) = \pi(25 \text{ cm}^2 - 4 \text{ cm}^2) = 21\pi \text{ cm}^2.$$

Odpowiedź: Pole tego pierścienia kołowego wynosi 21π cm^2.

0.3

→ Powrót do zadań

1. Współrzędna x-owa punktu jest równa $\frac{1}{2}$, jak i również jego współrzędna y-owa, stąd sinus tego kąta jest równy:

$$\sin\alpha = y = \frac{1}{2},$$

natomiast tangens:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = 1.$$

Pod koniec pozostało już tylko obliczenie wyrażenia z naszego zadania:

$$\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: Wyrażenie to jest równe $\frac{1}{2}$.

2. Musimy znaleźć w tym zadaniu rozwiązanie w formie $x = ...$, gdzie po prawej stronie równania będzie jakieś wyrażenie zależne od y. Możemy to zrobić na dwa sposoby: używając zależności długości boków w tym trójkącie lub trygonometrii. Tym razem użyjemy tego drugiego sposobu. Cosinus kąta 30° jest równy $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ale także jest równy stosunkowi długości odpowiednich boków:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x+3}{y} \quad / \cdot 2,$$

$$\sqrt{3} = 2 \cdot \frac{x+3}{y} \quad / \cdot y,$$

$$\sqrt{3}y = 2 \cdot (x+3),$$

$$\sqrt{3}y = 2x + 6 \quad / - 6,$$

$$2x = \sqrt{3}y - 6 \quad / : 2,$$

$$x = \frac{\sqrt{3}y - 6}{2}.$$

Prawidłową odpowiedzią jest odpowiedź (d).

3. Sinus tego kąta jest równy:

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0{,}6.$$

Patrzymy następnie na kartę wzorów i szukamy takiego kąta α, którego sinus wynosi około 0,6. Taki kąt powinien mieć miarę ok. 36°, stąd poprawną odpowiedzią jest odpowiedź (b).

4. Odczytujemy wartość dla $\sin 70^\circ$ na ok. 0,94 i rozwiązujemy równanie:

$$-29x + 2 \cdot \sin\alpha = (\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5),$$

$$-29x + 2 \cdot \sin\alpha = x - 25 \quad / - x - 2 \cdot \sin\alpha,$$

$$-30x = -25 - 2 \cdot 0{,}94,$$

$$-30x = 25 - 1{,}88,$$

$$-30x = -26{,}88 \quad / : (-30),$$

$$x \approx 0{,}9.$$

Prawidłową odpowiedzią jest odpowiedź (c).

5. Znajdziemy x, jeśli przyrównamy sinus kąta 55°, wynikający z rysunku zadania, do jego wartości przybliżonej, która jest zapisana w karcie wzorów. Jego wartość wynosi ok. 0,82, stąd:

$$\frac{2x}{x+5} = 0{,}82 \quad / \cdot (x+5),$$

$$2x = 0{,}82 \cdot (x+5),$$

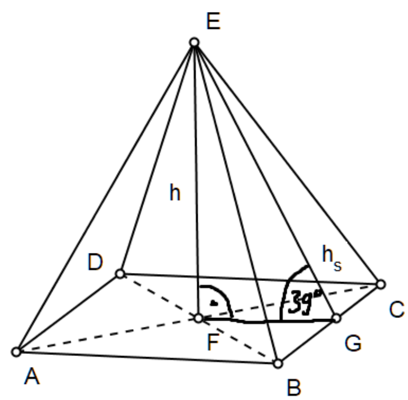
$$2x = 0{,}82x + 4{,}1 \quad / - 0{,}82x,$$

$$1{,}18x = 4{,}1 \quad / : 1{,}18,$$

$$x \approx 3{,}47.$$

Prawidłową odpowiedzią jest odpowiedź (a).

6. Kąt nachylenia wysokości ściany bocznej do pola powierzchni podstawy to kąt FGE. Stosunek długości wysokości ostrosłupa h do wysokości ściany bocznej h_S jest więc sinusem tego kąta.



Z karty wzorów odczytujemy, że jego wartość jest równa ok. 0,629. Poprawną odpowiedzią jest więc odpowiedź (b).

7. W tym przypadku $\cos\alpha$ to stosunek boku a do przekątnej o długości 10, stąd:

$$\cos\alpha = \frac{a}{10},$$

$$0{,}75 \approx \frac{a}{10} \quad / \cdot 10,$$

$$a \approx 7{,}5.$$

Natomiast $\sin\alpha$ to stosunek boku b do przekątnej o długości 10, stąd:

$$\sin\alpha = \frac{b}{10},$$

$$0{,}66 \approx \frac{b}{10} \quad / \cdot 10,$$

$$b \approx 6{,}6.$$

Przybliżoną wartość pola prostokąta obliczymy, korzystając z wyżej wyznaczonych przybliżonych wartości długości boków tego prostokąta:

$$P = ab \approx 7{,}5 \cdot 6{,}6 \approx 49{,}5.$$

Przybliżona wartość pola tego prostokąta wynosi 49,5.