# TEORIA I PRAKTYKA ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ OPTYMALIZACJI

Jacek Stadnicki

z przykładami zastosowań technicznych

Wydawnictwo WNT

# TEORIA
# I PRAKTYKA
# ROZWIĄZYWANIA
# ZADAŃ OPTYMALIZACJI

Jacek Stadnicki

# TEORIA I PRAKTYKA ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ OPTYMALIZACJI

z przykładami
zastosowań
technicznych

Wydawnictwo WNT

Recenzenci:
*prof. dr hab. inż. Eugeniusz Rusiński*
*prof. dr hab. inż. Jerzy Wróbel*

Redaktorzy: *Małgorzata Rajwacka-Jachymek, Bartosz Źrałek*
Projekt okładki i stron tytułowych: *Barbara Ćwik*
Ilustracja na okładce: ©*monsitj/iStock.com*
Redaktor techniczny: *Grażyna Miazek*
Korekta: *Zespół*
Przygotowanie do druku: *WOMAR Barbara Wojcieszuk*

Wydawca: *Adam Filutowski*

Podręcznik dotowany przez Ministra Nauki i Informatyzacji oraz przez Akademię Techniczno-Humanistyczną w Bielsku-Białej.



ISBN 978-83-01-19589-2

Wydanie I – 1 dodruk (PWN)
Warszawa 2017

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
02-460 Warszawa, ul. Gottlieba Daimlera 2
tel. 22 69 54 321, faks 22 69 54 288
infolinia 801 33 33 88
e-mail: pwn@pwn.com.pl; reklama@pwn.pl
www.pwn.pl

Druk i oprawa: OSDW Azymut Sp. z o.o.

# Spis treści

# Wykaz ważniejszych oznaczeń

$[\boldsymbol{A}], \{a_{ji}\}$ – macierz $m \times n$ współczynników $a_{ji}$, $j = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, n$,

$\boldsymbol{a}_i$ – $i$-ta kolumna macierzy $[\boldsymbol{A}]$,

$\boldsymbol{b}, \{b_j\}$ – wektor $1 \times m$ prawych stron ograniczeń $b_j$, $j = 1, \ldots, m$,

$\boldsymbol{c}, \{c_i\}$ – wektor $1 \times n$ funkcji celu $c_i$, $i = 1, \ldots, n$,

$\boldsymbol{C}$ – zbiór liczb całkowitych,

$\boldsymbol{d}$ – wektor kierunku poszukiwań,

$\boldsymbol{e}$ – wektor bazowy (wersor),

$g_j(\boldsymbol{x})$ – ograniczenie nierównościowe $j$,

$\operatorname{grad} Q(\boldsymbol{x}) = \nabla^T Q(\boldsymbol{x})$ – gradient funkcji $Q(\boldsymbol{x})$, $\left[\frac{\partial Q}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial Q}{\partial x_i} \cdots \frac{\partial Q}{\partial x_n}\right]$,

$h_j(\boldsymbol{x})$ – ograniczenie równościowe $j$,

$[\boldsymbol{H}]$ – macierz drugich pochodnych, hesjan,

$$[\boldsymbol{H}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 Q}{\partial x_n^2} \end{bmatrix},$$

$i = 1, \ldots, n$ – indeks zmiennej (kolumny),

$[\boldsymbol{I}]$ – macierz jednostkowa,

$j = 1, \ldots, m$ – indeks ograniczenia (wiersza),

$\widehat{ji}$ – łuk grafu między wierzchołkami $j$ oraz $i$,

$k$ – indeks iteracji (punktu),

$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ – funkcja Lagrange'a, $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = Q(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\boldsymbol{x})$,

$P(\boldsymbol{x}, r)$ – funkcja kary,

$q(\boldsymbol{x})$ – kryterium składowe w zadaniu wielokryterialnym,

$Q(\boldsymbol{x})$ – funkcja celu,

$\boldsymbol{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych,

$\boldsymbol{R}^n$ – unormowana $n$-wymiarowa przestrzeń euklidesowa,
$\mathrm{r}[\boldsymbol{A}]$ – rząd macierzy $[\boldsymbol{A}]$,
$\bar{\boldsymbol{U}}$ – dopełnienie zbioru $\boldsymbol{U}$,
$w$ – waga kryterium,
$x_i$ – zmienna decyzyjna $i$,
$\boldsymbol{x}, \{x_i\}$ – wektor $1 \times n$ zmiennych decyzyjnych $x_i$, $i = 1, \ldots, n$,
$\hat{\boldsymbol{x}}$ – wektor optymalny (minimum),
$\|\boldsymbol{x}\|$ – norma euklidesowa wektora $\boldsymbol{x}$,
$[\mathbf{0}]$ – macierz zerowa,
$\varepsilon$ – dokładność rozwiązania,
$\boldsymbol{\Phi}$ – zbiór dopuszczalny,
$\boldsymbol{\lambda}, \{\lambda_j\}$ – wektor $1 \times m$ mnożników Lagrange'a $\lambda_j$, $j = 1, \ldots, m$,
$\boldsymbol{\Psi}$ – zbiór dopuszczalnych wartości kryteriów,
$\boldsymbol{\Psi}^*$ – zbiór kompromisów.

# Przedmowa

Niniejszą książkę napisałem przede wszystkim dla studentów kierunków technicznych i informatycznych oraz inżynierów podejmujących w swojej praktyce zawodowej problemy optymalizacji konstrukcji, technologii czy systemów.

Treść podzieliłem na trzy części. W części pierwszej (Wybrane zagadnienia programowania liniowego), obejmującej rozdziały 1, 2, 3 i 4, omówiłem zagadnienia związane z programowaniem liniowym, poprzedzając je niezbędnym wprowadzeniem do tematyki przestrzeni liniowych i zbiorów wypukłych. Problematykę programowania liniowego poszerzyłem o programowanie w zbiorach dyskretnych oraz optymalizację transportu i przepływu w sieciach. Mimo iż wiele zadań optymalizacji występujących w trakcie projektowania jest zadaniami nieliniowymi, zadanie programowania liniowego stanowi ważne uzupełnienie i podstawę zagadnień omawianych w następnych rozdziałach.

Część drugą (Wybrane zagadnienia programowania nieliniowego) stanowią rozdziały 5, 6, 7 i 8. W rozdziałach 5 i 6 dokonałem przeglądu metod analitycznych i algorytmów numerycznych optymalizacji nieliniowej oraz omówiłem problem dekompozycji pierwotnego zadania wielowymiarowego do ciągu zadań jednowymiarowych. Rozdziały 7 i 8 są rozszerzeniem i uzupełnieniem poprzednich rozdziałów o zagadnienia związane z algorytmami genetycznymi i z programowaniem wielokryterialnym.

W części trzeciej (Przykłady praktycznego wykorzystania optymalizacji w projektowaniu maszyn), składającej się z rozdziałów 9 i 10, przedstawiłem problematykę związaną z zastosowaniami optymalizacji w projektowaniu maszyn i urządzeń. Podałem wybrane przykłady formułowania zadań optymalizacji w praktyce inżynierskiej przy projektowaniu maszyn włókienniczych. W rozdziale 9 omówiłem zastosowania optymalizacji w rozwiązywaniu zadań, do których sformułowania wykorzystuje się szeroko stosowaną w dziedzinie analizy konstrukcji mechanicznych metodę elementów skończonych. Rozdział 10 zawiera przykłady problemów praktycznych, których istotą jest samo formułowanie zadania, a nie sposób jego rozwiązania. Ta część książki jest przeznaczona dla inżynierów mechaników; dotyczy problemów mechaniki stosowanej, podstaw konstrukcji maszyn i budowy maszyn włókienniczych.

Całość wykładu przedstawiłem, korzystając z jednolitej notacji, co ułatwia zrozumienie treści; na początku książki zamieściłem wykaz najczęściej używanych oznaczeń. Przy omawianiu algorytmów podałem niezbędne podstawy teoretyczne oraz przykłady liczbowe, ułatwiające prześledzenie ich toku.

Ponieważ książka jest adresowana przede wszystkim do inżynierów i studentów politechnik, najobszerniej potraktowałem zagadnienia dotyczące programowania wypukłego. W praktyce inżynierskiej zazwyczaj znane są wartości początkowe zmiennych decyzyjnych (podobna konstrukcja już istnieje), poszukuje się natomiast poprawionych wartości zmiennych, dla których, w świetle przyjętego kryterium, nowa konstrukcja będzie najlepsza z możliwych. Z tych samych powodów nie przedstawiłem komputerowych implementacji algorytmów w konkretnych językach programowania. Można je znaleźć w specjalistycznej literaturze, są dostępne w Internecie, a co najważniejsze – stanowią coraz częściej element komercyjnego oprogramowania inżynierskiego CAD/CAE.

Niniejsza książka, zgodnie z moją intencją, powinna być przydatna studentom i inżynierom korzystającym z metod optymalizacji w rozwiązywaniu problemów technicznych.

Pragnę podziękować Panu Profesorowi Jerzemu Wróblowi za cenne uwagi oraz propozycje zmian i uzupełnień; dzięki nim ulepszyłem pierwotny tekst książki. Dziękuję również Panu Profesorowi Kazimierzowi Nikodemowi i Panu Doktorowi Piotrowi Danielczykowi, którzy byli pierwszymi Czytelnikami maszynopisu; ich cenne uwagi przyczyniły się do ostatecznej postaci niniejszej książki. Panu Profesorowi Eugeniuszowi Rusińskiemu dziękuję za uwagi i wskazówki dotyczące redakcji tekstu.

*Bielsko-Biała, grudzień 2004* *Jacek Stadnicki*

# Wstęp

Zadaniem inżyniera jest tworzenie nowych maszyn, urządzeń, technologii czy systemów, które powinny zaspokajać potrzeby przyszłych użytkowników. Projektowanie rozumiane jako proces tworzenia wymaga podejmowania decyzji o wyborze najlepszych wariantów rozwiązań składających się na projekt. Najlepszy wariant to najczęściej taki, który przy ograniczonych możliwościach umożliwia osiągnięcie maksimum korzyści lub zapewnia realizację projektu przy minimum nakładów. Decyzję o wyborze rozwiązania podejmuje się z wykorzystaniem wiedzy, doświadczenia i intuicji, lecz często przy użyciu metody prób i błędów. Współczesne projekty są coraz bardziej złożone, dąży się do skrócenia czasu ich opracowywania i żąda przy tym coraz lepszych efektów w stosunku do poniesionych nakładów. Margines błędu, jaki pozostawia się inżynierowi-projektantowi, staje się coraz mniejszy i dlatego coraz częściej decyzje podejmuje się na podstawie rozwiązania odpowiednio sformułowanego i zapisanego w sposób sformalizowany zadania. Tym problemom jest poświęcona gałąź wiedzy inżynierskiej zwana teorią projektowania. W ramach tej teorii wyboru rozwiązania dokonuje się, korzystając z teorii i metod postępowania zwanych optymalizacją. Jeżeli efekt, jaki ma być uzyskany dzięki projektowi, da się wyrazić ilościowo (zdefiniować funkcję celu – kryterium oceny), a przy tym będzie on zależeć od wartości pewnej liczby wielkości (zmiennych decyzyjnych), które mogą przyjmować wartości w granicach wyznaczających zbiór możliwych rozwiązań (zbiór dopuszczalny), to zadanie polega na znalezieniu takich wartości zmiennych decyzyjnych, dla których funkcja celu osiąga minimum lub maksimum w zbiorze dopuszczalnym. Zadanie sformułowane w taki sposób jest zadaniem optymalizacji[1] gotowym do rozwiązywania. Rozwiązanie można potraktować jako optymalny wariant projektu.

[1] W literaturze dotyczącej przedmiotu określenia *zadanie optymalizacji* i *zadanie programowania* są używane zamiennie. Określenie *zadanie programowania* ma swoją historyczną przyczynę. Jedne z pierwszych zastosowań programów komputerowych dotyczyły rozwiązywania zadań optymalizacji.

Przy rozwiązywaniu praktycznych problemów umiejętność poprawnego sformułowania zadania optymalizacji jest równie ważna, jak umiejętność wyboru odpowiedniego algorytmu rozwiązywania zadania. Dlatego w książce omówiono kilka przykładów praktycznych zadań optymalizacji ze zwróceniem uwagi na formułowanie zadania. Inżynierskie zadania optymalizacji w projektowaniu maszyn najczęściej wymagają indywidualnego potraktowania, tak jak indywidualny (twórczy) jest proces projektowania. Dlatego trudno jest podać ogólny schemat postępowania przy formułowaniu tych zadań, który w każdym przypadku prowadziłby do oczekiwanych wyników. Można jedynie wymienić trzy etapy występujące najczęściej przy formułowaniu inżynierskich zadań optymalizacji.

Etap 1. *Zbudowanie matematycznego modelu konstrukcji* z wyspecyfikowaniem zbioru cech, które mogą przyjmować różne wartości i być traktowane w zadaniu jako zmienne decyzyjne. Zmiennymi decyzyjnymi są najczęściej: wymiary konstrukcji, sztywności elementów, wielkości charakterystyczne (np. liczby zębów kół, moduły, przełożenia przekładni, liczby zwojów sprężyn, liczby takich samych elementów w zespole), wielkości wyrażane za pomocą charakterystyk – przebiegów w funkcji innych wielkości (np. drogi, prędkości, przyspieszenia, siły lub momenty napędowe), wielkości definiujące kształt projektowanej części (np. współczynniki funkcji opisujących zarys części) itp.

Etap 2. *Przyjęcie ograniczeń zadania* określających granice zmienności zmiennych decyzyjnych. Ograniczeniami w zadaniu są najczęściej: dopuszczalne naprężenia, dopuszczalne odkształcenia lub przemieszczenia, częstości drgań własnych, siły lub momenty krytyczne wynikające z warunków utraty stateczności, graniczne wartości (np. przekrojów poprzecznych produkowanych profili, normalne lub zalecane moduły zębów, przełożenia przekładni, wielkości charakterystyczne typoszeregu) itp.

Etap 3. *Przyjęcie funkcji celu* (jednej lub kilku), która będzie kryterium oceny wariantów konstrukcji, należących do zbioru dopuszczalnego i posłuży do wyboru najlepszego wariantu z uwagi na przyjęte kryterium. Funkcjami celu są najczęściej: masa lub objętość konstrukcji, koszt lub pracochłonność wykonania, odchylenie charakterystycznej wielkości od wielkości pożądanej, naprężenia lub odkształcenia itp.

Szersze omówienie tej problematyki można znaleźć m.in. w [36], [54], [55].

Istnieje wiele rodzajów zadań optymalizacji. Zależnie od tego, którą z cech danego zadania przyjmuje się za odróżniającą je od innych, można podać różne sposoby klasyfikowania zadań. Na przykład z uwagi na:

- **występowanie ograniczeń w zadaniu**; rozważa się tu
  - *zadanie z ograniczeniami*, w którym zmienne decyzyjne muszą przyjmować wartości należące do zbioru dopuszczalnego,
  - *zadanie bez ograniczeń*, w którym zmienne decyzyjne mogą przyjmować dowolne wartości;

Różnice między rodzajami zadań optymalizacji powodują, iż nie ma jednej efektywnej metody rozwiązywania ich wszystkich. Poszczególne typy zadań rozwiązuje się za pomocą wyspecjalizowanych odpowiednich metod (algorytmów). Dlatego tak ważne jest poznanie różnych algorytmów, aby odpowiedni z nich zastosować do typu konkretnego zadania.

Podstawy teoretyczne metod analitycznych poszukiwania minimum funkcji zostały podane przez Bernoulliego, Eulera, Lagrange'a i Weierstrassa. Jednak złożoność zadań optymalizacji rozwiązywanych w praktyce sprawia, iż użyteczność metod analitycznych jest niewielka. Dalszy postęp w rozwoju metod optymalizacji doprowadził w 1947 r. do opracowania przez Dantziga algorytmu sympleks dla zadania programowania liniowego, w 1951 r. do sformułowania przez Kuhna i Tuckera warunków koniecznych i wystarczających istnienia ekstremum warunkowego funkcji oraz w 1957 r. – do podania przez Bellmana tzw. zasady optymalności dla programowania dynamicznego. Jednak dopiero rozpowszechnienie i rozwój sprzętu komputerowego w ostatnich dziesięcioleciach przyczynił się do powstania efektywnych numerycznych algorytmów optymalizacji. W rezultacie opracowano wiele skutecznych programów komputerowych, które uzupełniły narzędzia wykorzystywane wcześniej w projektowaniu przez inżynierów.