MATEMATYKA

PORADNIK ENCYKLOPEDYCZNY

MASZ…
…ZDASZ
egzaminy
testy

I.N. BRONSZTEJN
K.A. SIEMIENDIAJEW

PWN

MATEMATYKA

PORADNIK
ENCYKLOPEDYCZNY

MATEMATYKA
PORADNIK ENCYKLOPEDYCZNY

I.N. BRONSZTEJN
K.A. SIEMIENDIAJEW

Tłumaczyli
Stefan Czarnecki
Robert Bartoszyński

Wydanie dwudzieste

PWN

Tytuł oryginału:

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И УЧАЩИХСЯ ВТУЗОВ

Государственное Издательство
Физико-математической Литературы

Москва 1965

Taschenbuch der Mathematik
B.G. Teubner Verlagsgesellschaft
Leipzig 1959

Projekt okładki i stron tytułowych *Joanna Gwis*

ISBN 978-83-01-16163-7

Wydanie XX – 2 dodruk
Warszawa 2014

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
tel.: 22 69 54 321; faks: 22 69 54 288
infolinia 801 33 33 88
e-mail: pwn@pwn.com.pl; www.pwn.pl
Druk i oprawa: OSDW Azymut Sp. z o.o.

PRZEDMOWA

Napisanie poradnika o niewielkiej objętości, w którym byłyby podane podstawowe wiadomości z dziedziny matematyki niezbędne dla studentów szkół wyższych i użytkowników w ich nauce i działalności praktycznej, jest zadaniem niezwykle trudnym. Dążąc do zwięzłości wykładu, Autorzy usiłowali jednak dać poradnik przystępny, wygodny w użyciu i pod względem matematycznym w miarę możności ścisły.

Należy zaznaczyć, że książka ta, to nie podręcznik ani skrót podręcznika, lecz poradnik; dlatego nie ma tu takiej systematyczności, jaką powinien cechować się podręcznik. Nie powinno więc dziwić Czytelnika, że na przykład reguła de l'Hospitala znalazła się w paragrafie o obliczaniu granic, który jest częścią rozdziału *Wstęp do analizy*, umieszczonego przed wprowadzeniem pojęcia pochodnej, a informacje o funkcji gamma — w rozdziale *Algebra*, bezpośrednio po pojęciu silni. Takich „niewłaściwości" jest w poradniku bardzo dużo. Dlatego też Czytelnikowi pragnącemu uzyskać taką czy inną informację radzimy posługiwać się nie tylko spisem rzeczy, ale i skorowidzem alfabetycznym zamieszczonym na końcu książki. Jeżeli w tekście poradnika jest wzmianka o zagadnieniu wyjaśnionym bardziej szczegółowo w innym miejscu książki, wskazuje się wtedy w odsyłaczu odpowiednią stronicę.

*

W drugim polskim wydaniu *Poradnika* zostały wprowadzone następujące większe zmiany w stosunku do pierwszego wydania. Mianowicie dodano dwa rozdziały: *Rachunek wariacyjny* i *Równania całkowe*, przetłumaczone z niemieckiego wydania tej książki (*Taschenbuch der Mathematik*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1959), oraz rozdział *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, opracowany przez R. Bartoszyńskiego. Ponadto zostały usunięte zauważone drobne usterki z poprzedniego wydania.

OZNACZENIA MATEMATYCZNE

I. Związki między wielkościami

$=$	równa się
$\equiv$	równa się tożsamościowo
$\neq$	nie równa się
$\sim$	równa się w przybliżeniu
$<$	jest mniejsze
$>$	jest większe
$\leqslant$	jest mniejsze lub równe
$\geqslant$	jest większe lub równe

II. Algebra

$\lvert a \rvert$	bezwzględna wartość liczby a
$+$	plus (dodawanie)
$-$	minus (odejmowanie)
$\cdot$ lub $\times$	mnożenie, na przykład $a \cdot b$ lub $a \times b$; znak mnożenia bywa często opuszczany, na przykład ab
: lub $-$, lub /	dzielenie, na przykład $a:b$ lub $\frac{a}{b}$, lub a/b
a^m	a do potęgi m
$\sqrt{}$	pierwiastek kwadratowy, na przykład $\sqrt{a}$
$\sqrt[n]{}$	pierwiastek stopnia n, na przykład $\sqrt[n]{a}$
$\log_b$	logarytm przy podstawie b, na przykład $5 = \log_2 32$ (str. 163) ([1])
log	logarytm dziesiętny, na przykład $2 = \log 100$ (str. 164)
ln	logarytm naturalny, na przykład $1 = \ln e$ (str. 164)
$\exp x$	funkcja wykładnicza e^x
$()$, $\langle\rangle$, $[]$, $\{\}$	nawiasy (kolejność działań)
!	silnia, na przykład $a!$, $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ (str. 203).

([1]) W nawiasach podano stronice *Poradnika*, na których objaśnione zostały odpowiednie pojęcia.

III. Geometria

$\perp$	jest prostopadłe	
$\parallel$	jest równoległe	
$\#$	jest równe i równoległe	
$\sim$	jest podobne, na przykład $\triangle ABC \sim \triangle DEF$	
$\triangle$	trójkąt	
$\sphericalangle$	kąt, na przykład $\sphericalangle ABC$	
$\smile$	łuk, na przykład $\overset{\smile}{AB}$ lub $\smile AB$	
$^\circ$	stopień	
$'$	minuta	w mierze kątowej, na przykład $32^\circ 14' 11'',5$
$''$	sekunda	

IV. Trygonometria, funkcje hiperboliczne

sin	sinus	
cos	cosinus	
tg	tangens	(str. 230)
ctg	cotangens	
sec	secans	
cosec	cosecans	
arc sin	arcus sinus	
arc cos	arcus cosinus	(str. 242)
arc tg	arcus tangens	
arc ctg	arcus cotangens	
sinh	sinus hiperboliczny	
cosh	cosinus hiperboliczny	
tgh	tangens hiperboliczny	(str. 248)
ctgh	cotangens hiperboliczny	
sech	secans hiperboliczny	
cosech	cosecans hiperboliczny	
ar sinh	area sinus hiperboliczny	
ar cosh	area cosinus hiperboliczny	(str. 252)
ar tgh	area tangens hiperboliczny	
ar ctgh	area cotangens hiperboliczny	

V. Oznaczenia stałych

const	wielkość stała (constans)
$\pi = 3{,}14159\ldots$	stosunek długości obwodu koła do średnicy (str. 215)
$e = 2{,}71828\ldots$	podstawa logarytmów naturalnych (str. 358)
$\gamma = 0{,}57722\ldots$	stała Eulera (str. 358)

VI. Analiza matematyczna

lim	granica (limes) (str. 344, 355)	
$\to$	dąży do ...	na przykład $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
∞	nieskończoność	

$\sum$	suma
$\sum_{i=1}^{n}$	suma, w której i zmienia się od 1 do n
$f(\,)$, $\varphi(\,)$	oznaczenia funkcji, na przykład: $y = f(x)$, $u = \varphi(x, y, z)$
Δ	przyrost, na przykład Δx
d	różniczka, na przykład dx (str. 390)
d_x, d_y itd.	różniczka cząstkowa, na przykład $d_x u$ (str. 391)
$'$, $''$, $'''$, $^{(n)}$ $^{\cdot}$, $^{\cdot\cdot}$, $^{\cdot\cdot\cdot}$, $^{\cdot\cdot\cdot\cdot}$	oznaczenia kolejnych pochodnych funkcji jednej zmiennej, na przykład funkcji $y = f(x)$: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(n)}(x)$, y', y'', y''', $y^{(n)}$, $y^{\cdot}$, $y^{\cdot\cdot}$, $y^{\cdot\cdot\cdot}$, $y^{\cdot\cdot\cdot\cdot}$ (str. 388, 390, 393)
$\frac{d}{dx}$, $\frac{d^2}{dx^2}$	pierwsza pochodna, druga pochodna itd., na przykład $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ itd. (str. 388, 393)
D	znak pochodnej (operator różniczkowania), na przykład $Dy = y'$, $D^2y = y''$ itd. (str. 388, 393)
f'_x f''_{xx}, f''_{xy} $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$	pochodne cząstkowe, na przykład $f'_x(u)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ itd. (390, 393)
$\int$	całka (str. 425)
$\int_a^b$	całka oznaczona od dolnej granicy a do górnej granicy b (str. 485)
$\int_{(K)}$	całka krzywoliniowa wzięta po łuku K lub po rzucie łuku K (str. 517, 519)
$\int_S$, $\int_V$	całka rozciągnięta na płaszczyznę S lub na objętość V (str. 526, 527)
$\iint$	całka podwójna (str. 526, 527)
$\iiint$	całka potrójna (str. 526, 527)

VII. Liczby zespolone

i (niekiedy j)	jednostka urojona ($i^2 = -1$) (str. 617)
re a	część rzeczywista liczby zespolonej a (str. 617)
im a	część urojona liczby zespolonej a (str. 617)
$\|a\|$	moduł a liczby zespolonej (str. 618)
arg a	argument a (str. 618)

$\bar{a}$	liczba sprzężona z a, na przykład $a=2+3i$, $\bar{a}=2-3i$ (str. 619)
Ln	logarytm (naturalny) liczby zespolonej (str. 625)

VIII. Rachunek wektorowy

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$; $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$	oznaczenia wektorów (str. 646)
$\boldsymbol{a}^0$	wersor o tym kierunku co wektor $\boldsymbol{a}$ (str. 647)
$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$	wersory w układzie współrzędnych prostokątnych (str. 647)
$\|\boldsymbol{a}\|$ lub a	długość (bezwzględna wartość) wektora $\boldsymbol{a}$ (str. 646)
$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$	równość, dodawanie, odejmowanie wektorów (str. 646, 648)
$\alpha\boldsymbol{a}$	mnożenie skalara przez wektor (str. 648)
$\boldsymbol{ab}$ lub $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$	iloczyn skalarny wektorów (str. 650)
$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ lub $[\boldsymbol{ab}]$	iloczyn wektorowy wektorów (str. 650)
$\boldsymbol{abc}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$	iloczyn mieszany trzech wektorów (str. 651)
a_x, a_y, a_z	współrzędne wektora $\boldsymbol{a}$ w układzie współrzędnych prostokątnych (str. 649)
∇	operator różniczkowy Hamiltona (nabla) (str. 677)
Δ	operator Laplace'a (str. 678)
grad	gradient pola skalarnego ($\operatorname{grad}\varphi=\nabla\varphi$) (str. 666)
div	dywergencja pola wektorowego ($\operatorname{div}\boldsymbol{V}=\nabla\boldsymbol{V}$) (str. 675)
rot	rotacja pola wektorowego ($\operatorname{rot}\boldsymbol{V}=\nabla\times\boldsymbol{V}$) (str. 675)
$\dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{c}}$	pochodna pola skalarnego względem wektora $\boldsymbol{c}$ (str. 666)

ALFABET GRECKI

$A\ \alpha$	alfa	$H\ \eta$	eta	$N\ \nu$	ni	$T\ \tau$	tau
$B\ \beta$	beta	$\Theta\ \vartheta\ \theta$	teta	$\Xi\ \xi$	ksi	$\Upsilon\ \upsilon$	ypsilon
$\Gamma\ \gamma$	gamma	$I\ \iota$	jota	$O\ o$	omikron	$\Phi\ \varphi$	fi
$\Delta\ \delta$	delta	$K\ \varkappa$	kappa	$\Pi\ \pi$	pi	$X\ \chi$	chi
$E\ \varepsilon$	epsilon	$\Lambda\ \lambda$	lambda	$P\ \varrho$	ro	$\Psi\ \psi$	psi
$Z\ \zeta$	dzeta	$M\ \mu$	mi	$\Sigma\ \sigma$	sigma	$\Omega\ \omega$	omega

CZĘŚĆ PIERWSZA

TABLICE I WYKRESY

I. TABLICE

Interpolacja. Większość zamieszczonych poniżej tablic podaje wartości funkcji o czterech cyfrach wartościowych ([1]) dla argumentów o trzech cyfrach wartościowych. W wypadkach gdy argument podany jest z większą dokładnością i szukanej wartości funkcji nie można znaleźć bezpośrednio z tablic, trzeba uciec się do interpolacji. Najprostsza jest *interpolacja liniowa,* przy której zakłada się, że przyrost funkcji jest proporcjonalny do przyrostu argumentu. Jeżeli szukana wartość argumentu x leży pomiędzy znajdującymi się w tablicy wartościami x_0 i $x_1 = x_0+h$, i wartościom tym odpowiadają wartości funkcji

$$y_0 = f(x_0) \quad \text{i} \quad y_1 = f(x_1) = y_0+\varDelta,$$

to przyjmuje się, że

$$f(x) = f(x_0)+\frac{x-x_0}{h}\varDelta.$$

Poprawka interpolacyjna $\frac{x-x_0}{h}\varDelta$ daje się łatwo obliczyć za pomocą tablicy poprawek proporcjonalnych na str. 84 i 85, a także za pomocą wkładki do poradnika podającej iloczyny wartości różnicy $\varDelta$ (od 11 do 90) przez 0,1, 0,2, ..., 0,9.

P r z y k ł a d y. 1. Obliczamy $1{,}6754^2$. W tablicy (str. 17) znajdujemy $1{,}67^2 = 2{,}789$, $1{,}68^2 = 2{,}822$, $\varDelta = 33$ ([2]). Z tablicy poprawek proporcjonalnych mamy

$$0{,}5\cdot 33 = 16{,}5, \quad 0{,}04\cdot 33 = 1{,}3, \quad \frac{x-x_0}{h}\varDelta = 16{,}5+1{,}3 \approx 18,$$

a więc $1{,}6754^2 = 2{,}807$.

2. Obliczamy $\operatorname{tg} 79°24'$. W tablicach (str. 58 i 85) znajdujemy $\operatorname{tg} 79°20' = 5{,}309$, $\operatorname{tg} 79°30' = 5{,}396$, $\varDelta = 87$; $0{,}4\cdot 87 \approx 35$, a więc mamy $\operatorname{tg} 79°24' = 5{,}344$.

Błąd w interpolacji liniowej nie przewyższa jednostki ostatniej cyfry wartościowej, jeżeli dwie kolejne różnice $\varDelta_0$ i $\varDelta_1$ różnią się nie więcej

([1]) Określenie cyfr wartościowych patrz str. 139.

([2]) Różnicę $\varDelta$ oraz poprawkę wyraża się zazwyczaj w jednostkach ostatniego rzędu wartości funkcji, bez wypisywania początkowych zer oraz przecinka dziesiętnego.

niż o 4 jednostki ostatniego rzędu. Jeżeli ten warunek nie jest spełniony (jak np. w tablicy $\operatorname{tg} x$ dla $x > 80°$, str. 58), trzeba posłużyć się bardziej skomplikowanymi wzorami interpolacyjnymi. W większości wypadków wystarcza *interpolacja kwadratowa według Bessela*:

$$f(x) = f(x_0) + k\Delta_0 - k_1(\Delta_1 - \Delta_{-1}),$$

gdzie

$$k = \frac{x-x_0}{h}, \qquad k_1 = \frac{k(1-k)}{4};$$

$x_{-1} = x_0 - h$	y_{-1}	
		Δ_{-1}
x_0	y_0	
		Δ_0
$x_1 = x_0 + h$	y_1	
		Δ_1
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	

wartość k_1 znajduje się w tablicy na str. 86.

P r z y k ł a d. Trzeba znaleźć $\operatorname{tg} 85°33'$ (tablica na str. 58). Znajdujemy ($h = 10'$): $k = 0{,}3$, $k_1 = 0{,}052$; poprawka wynosi więc $0{,}3 \cdot 491 - 0{,}052 \cdot 75 \approx 143$, zatem $\operatorname{tg} 85°33' = 12{,}849$.

x	$\operatorname{tg} x$	Δ
85°20′	12,251	
		455
85°30′	12,706	
		491
85°40′	13,197	
		530
85°50′	13,727	

A. TABLICE FUNKCJI ELEMENTARNYCH

1. Niektóre często spotykane stałe

Stała	n	$\log n$	Stała	n	$\log n$
π	3,141593	0,49715	$1:\pi$	0 318310	$\overline{1}$,50285
2π	6,283185	0,79818	$1:2\pi$	0,159155	$\overline{1}$,20182
3π	9,424778	0,97427	$1:3\pi$	0,106103	$\overline{1}$,02573
4π	12,566371	1,09921	$1:4\pi$	0,079577	$\overline{2}$,90079
$\pi:2$	1,570796	0,19612	$2:\pi$	0,636620	$\overline{1}$,80388
$\pi:3$	1,047198	0,02003	$3:\pi$	0,954930	$\overline{1}$,97997
$\pi:4$	0,785398	$\overline{1}$,89509	$4:\pi$	1,273240	0,10491
$\pi:6$	0,523599	$\overline{1}$,71900	$6:\pi$	1,909859	0,28100
$\pi:180(=1°)$	0,017453	$\overline{2}$,24188	$180°:\pi$	57°,295780	1,75812
$\pi:10800(=1')$	0,000291	$\overline{4}$,46373	$10800':\pi$	3437',7468	3,53627
$\pi:648000(=1'')$	0,000005	$\overline{6}$,68557	$648000'':\pi$	206264'',81	5,31443
π^2	9,869604	0,99430	$1:\pi^2$	0,101321	$\overline{1}$,00570
$\sqrt{\pi}$	1,772454	0,24857	$\sqrt{1:\pi}$	0,564190	$\overline{1}$,75143
$\sqrt{2\pi}$	2,506628	0,39909	$\sqrt{1:2\pi}$	0,398942	$\overline{1}$,60091
$\sqrt{\pi:2}$	1,253314	0,09806	$\sqrt{2:\pi}$	0,797885	$\overline{1}$,90194
$\sqrt[3]{\pi}$	1,464592	0,16572	$\sqrt[3]{1:\pi}$	0,682784	$\overline{1}$,83428
$\sqrt[3]{4\pi:3}$	1,611992	0,20736	$\sqrt[3]{3:4\pi}$	0,620350	$\overline{1}$,79264
e	2,718282	0,43429	$1:e$	0,367879	$\overline{1}$,56571
e^2	7,389056	0,86859	$1:e^2$	0,135335	$\overline{1}$,13141
$\sqrt{e}$	1,648721	0,21715	$\sqrt{1:e}$	0,606531	$\overline{1}$,78285
$\sqrt[3]{e}$	1,395612	0,14476	$\sqrt[3]{1:e}$	0,716532	$\overline{1}$,85524
$e^{\pi/2}$	4,810477	0,68219	$e^{-\pi/2}$	0,207880	$\overline{1}$,31781
e^{π}	23,140693	1,36438	$e^{-\pi}$	0,043214	$\overline{2}$,63562
$e^{2\pi}$	535,491656	2,72875	$e^{-2\pi}$	0,001867	$\overline{3}$,27125
γ[1]	0,577216	$\overline{1}$,76134	$\ln \pi$	1,144730	0,05870
$M = \log e$	0,434294	$\overline{1}$,63778	$1:M = \ln 10$	2,302585	0,36222
g[2]	9,81	0,99167	$1:g$	0,10194	$\overline{1}$,00833
g^2	96,2361	1,98334	$1:2g$	0,050968	$\overline{2}$,70730
$\sqrt{g}$	3,13209	0,49583	$\pi\sqrt{g}$	9,83976	0,99298
$\sqrt{2g}$	4,42945	0,64635	$\pi\sqrt{2g}$	13,91552	1,14350

[1] γ jest stałą Eulera (oznaczaną również literą C).

[2] g jest przyśpieszeniem grawitacyjnym w m/sek^2; podane tu zostały wartości przyśpieszenia na poziomie morza i szerokości 45 - 50°.

2. Kwadraty, sześciany, pierwiastki

Tablica ta pozwala znaleźć kwadraty, sześciany oraz pierwiastki kwadratowe i sześcienne z dokładnością do czterech cyfr wartościowych. Dla argumentów n zawartych pomiędzy 1,00 a 10,00 wartości n^2 i n^3 znajdujemy bezpośrednio z tablic, jeżeli wartość argumentu podana jest z trzema cyframi wartościowymi. Na przykład $1{,}79^2 = 3{,}204$ (str. 17). Jeżeli wartość argumentu podana jest dokładniej (tzn. ma więcej niż trzy cyfry wartościowe), należy zastosować interpolację (patrz str. 11). Dla tablicy tej błąd interpolacji liniowej nigdy nie przekracza jednostki ostatniego rzędu.

Przy szukaniu n^2 i n^3 przy $n > 10$ i przy $n < 1$ należy wziąć pod uwagę, że przy pomnożeniu n przez wartość 10^k, wartość n^2 powiększa się 10^{2k} razy, a wartość n^3 powiększa się 10^{3k} razy, tzn. że przesunięcie przecinka w liczbie n o k miejsc dziesiętnych w prawo powoduje przeniesienie przecinka o $2k$ miejsc w prawo w liczbie n^2 i o $3k$ miejsc w liczbie n^3; przy tym do wziętej z tablicy liczby dopisuje się w miarę potrzeby zera po prawej stronie lub po lewej. Na przykład $0{,}179^2 = 0{,}03204$, $179^3 = 5\,735\,000$ (¹).

Pierwiastki kwadratowe dla wartości argumentu n od 1,00 do 10,00 możemy znaleźć bezpośrednio z tablicy (z zastosowaniem interpolacji liniowej, str. 11), a dla dowolnych n według następujących reguł:

1° Liczbę podpierwiastkową dzieli się na grupy dwucyfrowe po lewej i po prawej stronie przecinka dziesiętnego. 2° Zależnie od ilości cyfr wartościowych w najwyższej grupie niezerowej szuka się w tablicy wartości pierwiastka kwadratowego w kolumnie $\sqrt{n}$ albo w kolumnie $\sqrt{10n}$. 3° W znalezionej wartości pierwiastka kwadratowego kładzie się przecinek dziesiętny opierając się na tym, że każda grupa dwucyfrowa przed przecinkiem liczby podpierwiastkowej daje w wartości pierwiastka jedną cyfrę przed przecinkiem, a dla liczb mniejszych od 1 każda grupa dwucyfrowa leżąca po przecinku składająca się z zer daje w wartości pierwiastka jedno zero po przecinku.

Przykłady. 1. $\sqrt{23{,}9} = 4{,}889$. 2. $\sqrt{0{,}00|02|39} = 0{,}01546$. 3. $\sqrt{23|90|00} = 488{,}9$. 4. $\sqrt{0{,}00|3} = 0{,}05477$. (W przykładzie tym należy do liczby podpierwiastkowej dodać w pamięci jeszcze jedno zero na końcu, dla uzupełnienia grupy dwucyfrowej; najwyższa grupa dwucyfrowa 30 ma dwie cyfry wartościowe, a więc pierwiastka kwadratowego należy szukać w kolumnie $\sqrt{10n}$).

Pierwiastki stopnia trzeciego z liczb n, $10n$, $100n$ dla wartości n od 1,00 do 10,00 możemy znaleźć bezpośrednio z tablicy (z zastosowaniem interpolacji liniowej), a dla dowolnych n — według następujących reguł:

1° Liczbę podpierwiastkową rozdzielamy po obu stronach prze-

(¹) Poleca się zapis $179^3 = 5{,}735 \cdot 10^6$, dzięki któremu unika się pisania zer zamiast cyfr nieznanych (dokładnie $179^3 = 5\,735\,339$).