

Janusz Pędziwiatr

# Projektowanie słupów ŻELBETOWYCH



# Projektowanie słupów ŻELBETOWYCH



Janusz Pędziwiatr

# Projektowanie słupów ŻELBETOWYCH



PWN

Projekt okładki: **Ireneusz Gawliński**

Ilustracja na okładce: **Yurii Tymchuk/123RF**

Wydawca: **Karol Zawadzki**

Koordynator ds. redakcji: **Adam Kowalski**

Redaktor: **Anna Bogdanienko**

Produkcja: **Mariola Grzywacka**

Łamanie: **ScanSystem.pl Ewa Szelatyńska**

Recenzenci: **Dr hab. inż. Tomasz Trapko, prof. Politechniki Wrocławskiej**  
**Dr hab. inż. Jacek Korentz, prof. Uniwersytetu Zielonogórskiego**

Publikacja dofinansowana ze środków Wydziału Budownictwa Lądowego i Wodnego  
Politechniki Wrocławskiej

Książka, którą nabyłeś, jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy, abyś przestrzegał praw, jakie im przysługują. Jej zawartość możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym. Ale nie publikuj jej w Internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. A kopiując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.

Szanujmy cudzą własność i prawo.  
Więcej na [www.legalnakultura.pl](http://www.legalnakultura.pl)  
*Polska Izba Książki*

Copyright © by Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
Warszawa 2019

ISBN: 978-83-01-20352-8

Wydanie I

Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
02-460 Warszawa, ul. Gottlieba Daimlera 2  
tel. 22 69 54 321; faks 22 69 54 288; infolinia 801 33 33 88  
e-mail: [pwn@pwn.com.pl](mailto:pwn@pwn.com.pl); [reklama@pwn.pl](mailto:reklama@pwn.pl)  
[www.pwn.pl](http://www.pwn.pl)

Druk i oprawa: OSDW Azymut Sp. z o.o.

# Spis treści

|  |           |
|--|-----------|
| Słowo autora o książce .....   | 7         |
| Wykaz oznaczeń .....   | 9         |
| <b>1. Wstęp .....</b>  | <b>11</b> |
| 1.1. Uwagi ogólne .....  | 11        |
| 1.2. Podstawowe zagadnienia występujące podczas procesu projektowania .....                                    | 11        |
| <b>2. Wymiarowanie słupów o przekroju prostokątnym niesymetrycznie zbrojonych mimośrodowo ściskanych .....</b> | <b>19</b> |
| 2.1. Przekroje ze strefą rozciąganą .....  | 19        |
| 2.1.1. Wymiarowanie metodą ogólną .....  | 25        |
| 2.1.2. Wymiarowanie metodą uproszczoną – model sprężysto-plastyczny .....                                      | 38        |
| 2.1.3. Wymiarowanie metodą najbardziej uproszczoną .....   | 39        |
| 2.2. Przekroje całkowicie ściskane .....   | 45        |
| 2.2.1. Wymiarowanie metodą ogólną .....  | 49        |
| 2.2.2. Wymiarowanie przekrojów całkowicie ściskanych metodą uproszczoną .....                                  | 54        |
| <b>3. Wymiarowanie słupów o przekroju prostokątnym symetrycznie zbrojonych .....</b>                           | <b>58</b> |
| 3.1. Wymiarowanie przekrojów ze strefą rozciąganą .....  | 59        |
| 3.1.1. Wymiarowanie przekroju metodą ogólną .....  | 59        |
| 3.1.2. Wymiarowanie przekroju metodą uproszczoną .....   | 74        |
| 3.2. Wymiarowanie przekrojów całkowicie ściskanych .....   | 81        |
| 3.2.1. Wymiarowanie metodą ogólną .....  | 81        |
| 3.2.2. Wymiarowanie metodą uproszczoną .....   | 90        |
| 3.3. Uwagi końcowe .....   | 99        |

|  |     |
|--|-----|
| <b>4. Wyznaczanie nośności przekrojów słupów mimośrodowo ściskanych</b> .....                          | 100 |
| 4.1. Wyznaczanie krzywych interakcji (granicznych) .....   | 101 |
| 4.1.1. Wyznaczanie krzywych interakcji (granicznych) metodą ogólną .....                               | 102 |
| 4.1.2. Wyznaczanie krzywych interakcji (granicznych) metodą uproszczoną .....                          | 109 |
| 4.2. Wyznaczanie maksymalnych wartości momentu przy znanej wartości siły osiowej .....                 | 116 |
| 4.3. Wyznaczanie maksymalnych wartości siły przy znanej wartości momentu zginającego .....             | 121 |
| 4.4. Wyznaczanie maksymalnych wartości siły przy znanej wartości mimośrodu .....                       | 127 |
| <b>5. Wymiarowanie słupów o przekroju kołowym</b> .....  | 132 |
| 5.1. Uwagi ogólne .....  | 132 |
| 5.2. Wymiarowanie przekrojów ze strefą rozciąganą .....  | 133 |
| 5.3. Wymiarowanie przekrojów całkowicie ściskanych .....   | 147 |
| 5.4. Wyznaczanie nośności przekrojów kołowych .....  | 151 |
| 5.5. Wymiarowanie przekrojów kołowych w sposób przybliżony .....                                       | 156 |
| <b>6. Wpływ efektów II rzędu</b> .....   | 163 |
| 6.1. Uwagi ogólne .....  | 163 |
| 6.2. Metoda ogólna .....   | 165 |
| 6.2.1. Zależności moment-krzywizna .....   | 166 |
| 6.2.2. Zależności pomiędzy krzywizną i przemieszczeniem .....  | 182 |
| 6.2.3. Uwagi końcowe .....   | 191 |
| 6.3. Metoda nominalnej sztywności .....  | 192 |
| 6.3.1. Podstawy teoretyczne metody .....   | 192 |
| 6.3.2. Normowe algorytmy obliczeń .....  | 195 |
| 6.3.3. Zapis bezwymiarowy algorytmu postępowania przy wykorzystaniu metody nominalnej sztywności ..... | 197 |
| 6.4. Metoda nominalnej krzywizny .....   | 198 |
| 6.4.1. Podstawy teoretyczne metody .....   | 198 |
| 6.4.2. Normowe algorytmy obliczeń .....  | 202 |
| 6.4.3. Zapis bezwymiarowy algorytmu postępowania przy wykorzystaniu metody nominalnej krzywizny .....  | 203 |
| <b>7. Przykłady obliczeń słupów</b> .....  | 204 |
| <b>Bibliografia</b> .....  | 218 |

# Słowo autora o książce

Książka jest monografią poświęconą projektowaniu słupów żelbetowych zgodnie z ustaleniami podanymi w normie *PN-EN 1992-1-1. Eurokod 2. Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków*. Omówiony został proces projektowania począwszy od zasad wyznaczania miarodajnych sił wewnętrznych w węzłach słupów, poprzez wymiarowanie, analizę efektów drugiego rzędu do określenia podstawowych wymogów dotyczących ich konstruowania.

Szczegółową uwagę poświęcono wymiarowaniu słupów oraz analizie efektów drugiego rzędu. W obliczeniach posłużono się wszystkimi trzema obliczeniowymi modelami betonu, które norma dopuszcza do obliczeń stanów granicznych. Z przeprowadzonych w książce analiz i porównań wynika, że najwygodniej jest korzystać z modelu idealnie sprężysto-plastycznego. Pozwala on na relatywnie proste wymiarowanie zarówno przekrojów ze strefą rozciąganą, jak i całkowicie ściskanych dla dowolnych klas betonu oraz może być łatwo zastosowany do procedur związanych z ogólną metodą sprawdzania efektów drugiego rzędu.

Podano szczegółowe wzory służące wymiarowaniu słupów o przekrojach prostokątnych symetrycznie i niesymetrycznie zbrojonych dla dowolnych klas betonu. Autor wprowadził do literatury przedmiotu pojęcie domen (obszarów), wynikające z charakteru wykorzystania stali zbrojeniowej w przekroju. Pozwala to w nowy sposób zrozumieć pracę słupa obciążonego momentem i siłą osiową i w zrozumiały sposób go zwymiarować. Opracowano i przedstawiono związane z tym szczegółowe schematy blokowe oraz tabele do projektowania. Dotyczy to zarówno symetrycznie, jak i niesymetrycznie zbrojonych przekrojów prostokątnych. Oprócz procedur związanych z wymiarowaniem przedstawiono sposoby postępowania prowadzące do konstruowania krzywych granicznych (interakcji) służących sprawdzaniu nośności przekrojów.

W przypadku słupów o przekroju kołowym omówiono wpływ usytuowania prętów przy obwodzie słupa i przedstawiono oraz zastosowano koncepcję rozmytego



zbrojenia. Na tej podstawie opracowano i opisano zasady postępowania przy tworzeniu odpowiednich równań równowagi. Na szczególną uwagę zasługuje opracowana przez autora metoda uproszczona pozwalająca na analityczne wyznaczenie zbrojenia takich słupów.

Przedstawiono różne metody uwzględniania efektów drugiego rzędu. Podano założenia, które leżą u podstaw stosowanych zależności. Szczegółowo omówiono zasady i procedury postępowania związane ze stosowaniem metody ogólnej, która pozwala na analizę najszerszego spektrum zagadnień, ale jest w praktyce bardzo mało znana. W książce przedstawiono autorskie opracowania tej metody, pozwalające na relatywnie proste jej stosowanie.

W ostatnim rozdziale zamieszczono szereg przykładów obrazujących sposoby obliczeń omówione w książce.

Książka może być przydatna dla studentów budownictwa po kursie podstawowym, doktorantów, pracowników naukowych oraz dla projektantów. Na jej podstawie można wykonywać obliczenia lub opracowywać własne programy komputerowe.

# Wykaz oznaczeń

|                          |  |
|--------------------------|--|
| $a$                      | – grubość otuliny obliczana od krawędzi przekroju do środka ciężkości zbrojenia głównego           |
| $a_s$                    | – pole powierzchni pojedynczego pręta  |
| $a_{sr} = A_s / (\pi d)$ | – „rozmyte” zbrojenie w słupie o przekroju kołowym   |
| $b$                      | – szerokość przekroju prostokątnego  |
| $b_m$                    | – względna sztywność na zginanie   |
| $d$                      | – wysokość użyteczna przekroju prostokątnego; średnica przekroju kołowego                          |
| $e_0$                    | – początkowy mimośród działania siły składający się z sumy mimośrodu statycznego i niezamierzonego |
| $e_a$                    | – mimośród niezamierzony   |
| $e_s$                    | – mimośród statyczny   |
| $f_{cd}$                 | – obliczeniowa wytrzymałość betonu na ściskanie  |
| $f_{ctd}$                | – obliczeniowa wytrzymałość betonu na rozciąganie  |
| $f_{yd}$                 | – obliczeniowa wytrzymałość stali  |
| $h$                      | – wysokość przekroju prostokątnego   |
| $m = M / (f_{cd} A_c d)$ | – względny moment zginający  |
| $n = N / (f_{cd} A_c)$   | – względna siła osiowa   |
| $A_c$                    | – pole przekroju betonu  |
| $A_{s1}$                 | – pole przekroju zbrojenia rozciąganego lub mniej ściskanego                                       |
| $A_{s2}$                 | – pole przekroju zbrojenia ściskanego  |
| $B$                      | – sztywność przekroju na zginanie  |
| $E_s$                    | – moduł sprężystości stali   |
| $F_{s1}$                 | – siła w zbrojeniu rozciągającym lub mniej ściskanym   |
| $F_{s2}$                 | – siła w zbrojeniu ściskanym   |
| $M$                      | – moment wywołany obciążeniem zewnętrznym  |
| $M_{Ed}$                 | – obliczeniowy moment zginający  |

|  |  |
|--|--|
| $N_c$  | – siła w ściskanym betonie   |
| $N_{Ed}$   | – obliczeniowa siła osiowa   |
| $\alpha$   | – stosunek wartości modułów sprężystości stali do betonu                         |
| $\varepsilon_c$  | – odkształcenie w ściskanym betonie  |
| $\varepsilon_{c2}, \varepsilon_{c3}$   | – odkształcenie betonu, przy którym beton osiąga swoją wytrzymałość na ściskanie |
| $\varepsilon_{cu2}, \varepsilon_{cu3}$   | – odkształcenie graniczne betonu ściskanego                                      |
| $\varepsilon_{cr} = \frac{f_{ctd}}{E_c} = \varepsilon_{c3} \frac{f_{ctd}}{f_{cd}}$ | – odkształcenie rysujące w betonie   |
| $\varepsilon_{pl} = f_{yd} / E_s$  | – odkształcenie plastyczne stali   |
| $\varepsilon_s$  | – aktualne odkształcenie w zbrojeniu   |
| $\lambda$  | – smukłość słupa   |
| $\lambda_{lim}$  | – smukłość graniczna, powyżej której należy sprawdzać efekty drugiego rzędu      |
| $\sigma_c$   | – aktualne naprężenie w ściskanym betonie  |
| $\sigma_s$   | – aktualne naprężenie w zbrojeniu  |

## 1.1. Uwagi ogólne

Słupy są jednym z podstawowych elementów konstrukcyjnych. Stanowią one podpory przekazujące obciążenia z belek, płyt, tarcz itp. na niższe kondygnacje lub poprzez fundamenty – bezpośrednio na grunt. Zarówno słupy, jak i inne elementy konstrukcji betonowych projektuje się obecnie zgodnie z normą PN-EN 1992-1-1. Zawiera ona bardzo ogólne wymagania dotyczące ich obliczania i konstruowania.

Najczęściej projektowane słupy mają przekrój prostokątny. Różnica pomiędzy ścianą pełniącą podobną funkcję a słupem wynika z proporcji boków przekroju poprzecznego. W przypadku słupów wymiar dłuższego boku nie może przekraczać czterokrotności krótszego z nich. Oczywiście bardzo popularne, szczególnie ze względów architektonicznych, są słupy o przekroju kołowym.

Słupy mogą być projektowane i wykonywane zarówno jako elementy monolityczne, jak i prefabrykowane. Ważnymi zagadnieniami związanymi z projektowaniem słupów są problemy dotyczące elementów powiązanych bezpośrednio z nimi: stóp fundamentowych, wsporników, połączeń z belkami, płytami itp. Nabierają one szczególnego znaczenia, gdy słupy są wykonywane jako prefabrykaty.

## 1.2. Podstawowe zagadnienia występujące podczas procesu projektowania

Słupy najczęściej występują jako elementy bardziej złożonej konstrukcji. Obliczenia statyczne dla celów projektowych przeprowadza się obecnie najczęściej, korzystając z gotowych specjalistycznych programów komputerowych. Prawie zawsze słupy są traktowane jako elementy prętowe, a obliczenia przeprowadza się, zakładając

sprężystą pracę wszystkich elementów. Należy pamiętać, że siły wewnętrzne w słupach, występujących w układach statycznie niewyznaczalnych, są zależne od sztywności poszczególnych elementów. Z tego też względu celowe jest wstępne oszacowanie wymiarów tych elementów, tak aby ewentualne ich korekty nie miały znaczącego wpływu na sztywność. Raczej mało celowe jest, aby na tym etapie uwzględniać na przykład współpracę rygli z płytami. Może to być obarczone sporym błędem, a dodatkowo prowadzi do zaniżania wartości momentów w słupach. Bezpieczniej i prostszym rozwiązaniem jest przyjmowanie do obliczeń jedynie przekrojów samych belek. Za wystarczająco dokładne można też uznać wartości długości wybozeniowej słupów  $l_0$  uzyskane za pomocą tych programów. Wyniki obliczeń komputerowych pozwalają też na ocenę przemieszczeń węzłów słupów.

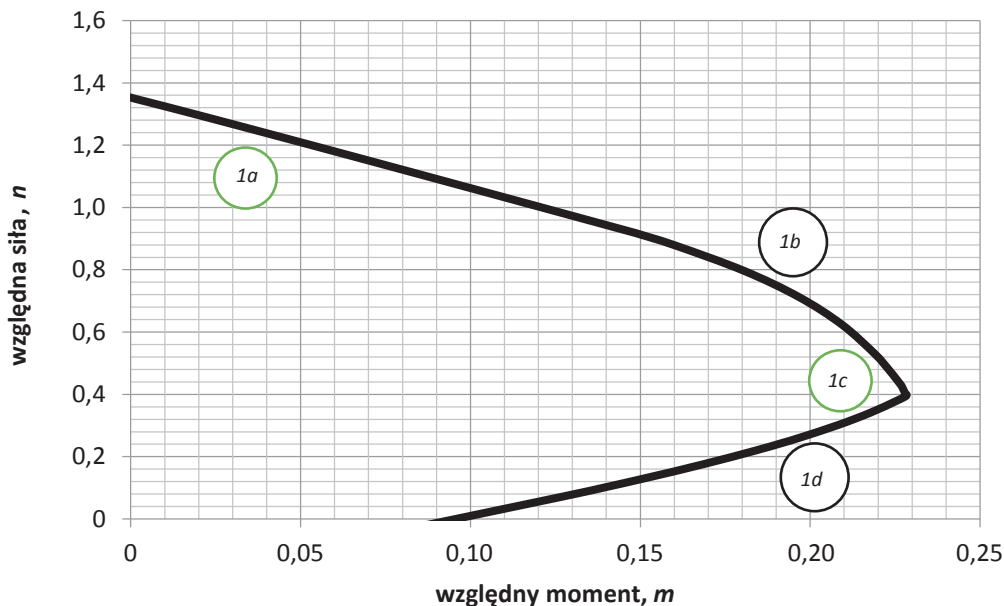
Projektując słupy, należy mieć świadomość, że nawet ograniczając się jedynie do samego słupa, napotyka się szereg trudnych problemów. Jednym z podstawowych jest ustalenie kombinacji miarodajnych obciążeń, to znaczy takiej, która jest dla danego słupa „najgorsza”. W przypadku belek sytuacja jest klarowna. Do bezpiecznego ich zwymiarowania ze względu na zginanie wystarczy znaleźć takie układy obciążeń, które generują powstanie ekstremalnych momentów – maksymalnego momentu rozciągającego włókna górne i analogicznego rozciągającego włókna dolne. Dobrane w ten sposób zbrojenie gwarantuje bezpieczeństwo ze względu na stan graniczny nośności na zginanie.

W przypadku słupów ma się zawsze do czynienia z parą sił wewnętrznych – siłą osiową  $N_{Ed}$  i momentem zginającym  $M_{Ed}$ . Znajduje się je dla obu węzłów (lub rzadziej – w jednym przekroju). Zbrojenie dobiera się w ten sposób, aby gwarantowało ono spełnienie warunków stanu granicznego nośności ze względu na mimośrodowe ściskanie na całej wysokości słupa – pomiędzy tymi węzłami. Problemem jest znalezienie najbardziej „niebezpiecznej” pary moment-siła. Tradycyjnie sugeruje się, aby z wielu kombinacji takich par wziąć pod uwagę następujące:

- a) maksymalna siła  $N_{Ed}^{\max}$  i odpowiadający jej (danemu układowi obciążeń) moment zginający  $M_{Ed}$ ,
- b) maksymalny moment zginający  $M_{Ed}^{\max}$  i odpowiadająca mu siła  $N_{Ed}$ ,
- c) minimalny (w sensie znaku) moment zginający  $M_{Ed}^{\min}$  i odpowiadająca mu siła  $N_{Ed}$ .

Nie gwarantuje to jednak w żadnym przypadku, że w ten sposób ustalono już najbardziej niekorzystną kombinację. Problem ten zilustrowany jest na rysunku 1.1. Przedstawiono na nim tak zwaną typową krzywą graniczną dla przekroju symetrycznie zbrojonego. Dla większej reprezentatywności na osiach występują współrzędne bezwymiarowe. Odpowiednikiem aktualnej siły osiowej  $N$  jest  $n = N/(f_{cd}A_c)$ , a zamiast momentu zginającego wykorzystuje się jego następujący odpowiednik

$m = n \frac{e_0}{d}$ . We wzorze tym  $e_0$  jest początkowym mimośrodem działania siły, który zawiera mimośród statyczny i niezamierzony.



Rys. 1.1. Cztery układy par  $(m, n)$  i odpowiednia krzywa graniczna

Punkty odpowiadające parom  $(m, n)$ , które znajdują się wewnątrz obszaru ograniczonego krzywą graniczną, spełniają warunki stanu granicznego nośności. Oznacza to, że dla parametrów, przy których wyznaczono tę krzywą (między innymi stopnie zbrojenia i klasa betonu), warunek nośności jest spełniony. Jeżeli natomiast punkt znajduje się poza tym obszarem, to stan graniczny nośności jest niespełniony i należy na przykład przyjąć wyższy stopień zbrojenia. Punkt *1a* odpowiada maksymalnej sile osiowej, ale jest w obszarze bezpiecznym, natomiast w punkcie *1b* siła jest mniejsza, ale większa wartość momentu powoduje, że jest on zlokalizowany na zewnątrz tego obszaru. Z drugiej strony jeszcze większy moment przy mniejszej sile – punkt *1c* – oznacza, że ta kombinacja obciążeń jest korzystniejsza. Zmniejszenie wartości siły nie jest jednak zawsze korzystne. Kolejny punkt – *1d* – odpowiada przypadkowi, gdy jest ona mniejsza, ale punkt znajduje się na zewnątrz bezpiecznego obszaru.

Reasumując, można stwierdzić, że jeżeli nie dysponuje się odpowiednio dużym doświadczeniem i intuicją, to po przyjęciu do wymiarowania wytypowanych par  $(m, n)$  i wyznaczeniu zbrojenia słupa warto sporządzić wykres krzywej granicznej

i upewnić się, że inne występujące kombinacje obciążeń dają współrzędne usytuowane wewnątrz bezpiecznego obszaru.

Wyznaczenie kombinacji miarodajnych obciążeń pozwala na przystąpienie do wymiarowania przekrojów w słupie. Tu napotyka się kolejne problemy. W przypadku słupów o przekroju prostokątnym ma się praktycznie do czynienia z dwoma grupami zbrojenia usytuowanymi przy przeciwległych krawędziach, odpowiadających kierunkowi działania momentu. Zbrojenia usytuowane przy pozostałych krawędziach można zwykle pominąć lub też uwzględnić, ale wtedy, jeżeli analizuje się pracę przekroju w drugiej płaszczyźnie. Zbrojenia zlokalizowane przy krawędziach generują dwie siły wewnętrzne – dwie niewiadome:  $F_{s1}$  i  $F_{s2}$ . Jeżeli w przekroju jest strefa rozciągana, to zwykle przez  $F_{s1}$  oznacza się wypadkową siłę w stali rozciąganej, a  $F_{s2}$  odpowiada sile w zbrojeniu ściskanym. Gdy cały przekrój jest ściskany,  $F_{s2}$  jest siłą w zbrojeniu bardziej ściskanym, a  $F_{s1}$  – w mniej ściskanym.

Przy wymiarowaniu, oprócz tych dwóch niewiadomych, występuje również nieznaną wartość siły w ściskanym betonie  $N_c$ . Ponieważ dysponuje się jedynie dwoma niezależnymi równaniami równowagi, okazuje się, że wymiarowanie słupa o przekroju prostokątnym mimośrodowo ściskanego jest zagadnieniem wewnętrznie statycznie niewyznaczalnym. Jest to źródło komplikacji, których nie ma podczas wymiarowania ze względu na zginanie. Oprócz tego pojawiają się dodatkowe utrudnienia wynikające z tego, że nawet w stanie granicznym nośności zbrojenia nie muszą być w pełni wykorzystane. Przez określenie „w pełni wykorzystane” w książce przyjmuje się, że naprężenia w stali zbrojeniowej są równe  $f_{yd}$ . Ze względu na wartości działającej na przekrój siły  $N_{Ed}$  i związanego z nią momentu  $M_{Ed}$  (oraz wzajemnych proporcji), odkształcenia w którejs stali mogą być mniejsze od tych, które odpowiadają uplastycznieniu ( $\varepsilon_s < \varepsilon_{pl}$ ) i w konsekwencji nie można w równaniach równowagi przyjmować  $f_{yd}$ , lecz raczej  $\sigma_s < f_{yd}$ . Wyznaczenie wartości tych naprężeń nie jest sprawą banalną.

Innego typu problemy występują przy wymiarowaniu słupów o przekroju kołowym. Zbrojenie takiego przekroju składa się zwykle z co najmniej sześciu prętów równomiernie rozłożonych wzdłuż obwodu. Wartości siły w poszczególnych prętach wynikają z odpowiadających im odkształceń. Problem ten można uprościć, zakładając liczbę i położenie tych prętów lub też zastępując pojedyncze pręty tak zwanym zbrojeniem rozmytym. Z punktu widzenia statyki można stwierdzić, że zbrojenie indukuje wtedy tylko jedną niewiadomą. Druga niewiadoma związana jest z siłą w betonie. W tym sensie zagadnienie jest statycznie wyznaczalne.

Niestety problemem staje się postać równań równowagi. Zarówno równanie równowagi sił, jak i momentów ma postać równania przestępnego. Jest to postać, która uniemożliwia analityczne wyznaczenie niewiadomych. Na przykład w przypadku przekroju kołowego ze strefą rozciąganą niewiadomy jest zasięg strefy ściskanej określanej przez kąt środkowy  $\alpha$  oraz funkcje trygonometryczne tego kąta.