Roman Leitner
Janusz Zacharski

Zarys matematyki wyższej dla studentów

część 3

Wydawnictwo WNT

Zarys matematyki wyższej

dla studentów

Roman **Leitner**
Janusz **Zacharski**

Zarys matematyki wyższej

dla studentów

część 3

Wydawnictwo WNT

Opiniodawcy:
Bolesław Palczewski
Andrzej Pacut

Redaktor wyd. IX*: Lilianna Szymańska*
Okładkę i strony tytułowe projektował: *Przemysław Spiechowski*
Redaktor techniczny: *Grażyna Miazek*

Wydawca: *Karol Zawadzki*

ISBN 978-83-01-18823-8 - całość
ISBN 978-83-01-19382-9 – część 3

Wydanie IX – 1 dodruk (PWN)
Warszawa 2017

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
02-460 Warszawa, ul. Gottlieba Daimlera 2
tel. 22 69 54 321, faks 22 69 54 288
infolinia 801 33 33 88
e-mail: pwn@pwn.com.pl; reklama@pwn.pl
www.pwn.pl

Druk i oprawa: OSDW Azymut Sp. z o.o.

Spis treści

Przedmowa

Książka niniejsza jest trzecią częścią zmienionego trzyczęściowego „Zarysu matematyki wyższej dla inżynierów”. Część pierwsza tego zmienionego wydania ukazała się w 1977 i 1981 r., a obecnie część druga i trzecia. Wydanie to różni się od poprzednich, zawiera wiele nowych rozdziałów, a wśród nich rachunek prawdopodobieństwa i statystykę matematyczną, które napisał magister Janusz Zacharski. Obecnie na całość „Zarysu” składają się:

- część I (logika, równania liniowe, geometria analityczna, ciągi i szeregi liczbowe, rachunek różniczkowy, geometria różniczkowa),
- część II (całka nieoznaczona, równania różniczkowe zwyczajne – metody elementarne, całka oznaczona, całki wielokrotne, krzywoliniowe i powierzchniowe, ciągi i szeregi funkcyjne, funkcje zespolone i przekształcenie Laplace'a),
- część III (równania różniczkowe zwyczajne – metody ogólne, równania fizyki matematycznej, przekształcenie Fouriera, macierze, rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna).

Materiał książki ułożono tak, aby wiadomości podstawowe były podane bez zbytniego rozbudowania treści pomocniczych. Uzupełnienia podano nieco dalej. Fragmenty, które można pominąć przy pierwszym czytaniu, oznaczono gwiazdkami. W książce znajduje się wiele przykładów.

Autorzy opracowują zbiór zadań dostosowany do układu „Zarysu” tak, aby Czytelnik mógł rozwiązywać zadania z zakresu poszczególnych rozdziałów.

Autorzy wyrażają podziękowanie docentowi doktorowi B. Palczewskiemu za wykonanie recenzji całości książki, doktorowi A. Pacutowi za wnikliwą recenzję ostatnich dwóch rozdziałów, a docentowi doktorowi T. Staniszowi za przeczytanie maszynopisu i wiele cennych uwag.

ROMAN LEITNER
JANUSZ ZACHARSKI

Warszawa, wrzesień 1987

Rozdział

27 Równania różniczkowe zwyczajne (metody ogólne)

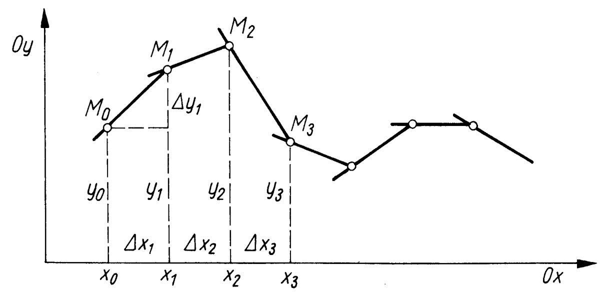
Pojęcie równania różniczkowego – zob. ZARYS cz. II, s. 46–53, 59–60.

§167. Metoda łamanych Eulera

Łamana Eulera. Rozważmy równanie różniczkowe

$$y' = f(x, y) \tag{167.1}$$

w którym f oznacza funkcję dwóch zmiennych x, y ciągłą w pewnym obszarze D. *Łamaną Eulera* dla równania (167.1) nazywamy linię łamaną $M_0 M_1 M_2 M_3 \ldots$ (rys. 167.1) leżącą w obszarze D i skonstruowaną w ten sposób, aby każdy z



Rys. 167.1

odcinków $M_0 M_1$, $M_1 M_2$, $M_2 M_3, \ldots$ miał kierunek wyznaczony przez wartość funkcji f w punkcie początkowym tego odcinka (§ 104, cz. II, kreślenie krzywych całkowych). Łamaną Eulera konstruujemy następująco:

1. Obieramy w obszarze D punkt $M_0 = (x_0, y_0)$, zwany *punktem wyjściowym*. Podstawiając współrzędne tego punktu do prawej strony równania (167.1), obliczamy współczynnik kątowy

$$y'_0 = f(x_0, y_0)$$

elementu kierunkowego w punkcie M_0 i w kierunku wyznaczonym przez ten współczynnik kreślimy niezerowy odcinek $M_0 M_1$ dowolnej długości. Odcinek ten nazywamy pierwszym *ogniwem* łamanej Eulera, a punkt M_1 pierwszym *wierzchołkiem* tej łamanej.

2. Współrzędne punktu M_1 oznaczamy x_1, y_1, a współrzędne wektora $\overrightarrow{M_0 M_1}$ oznaczamy

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 \qquad \Delta y_1 = y_1 - y_0$$

Liczbę Δx_1, różną od 0 i zwaną pierwszym *krokiem* łamanej, obieramy, natomiast liczbę Δy_1 wyliczamy z równości

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = y'_0 = f(x_0, y_0)$$

wyrażającej fakt, że wektor $\overrightarrow{M_0 M_1}$ ma kierunek wyznaczony przez wartość prawej strony równania w punkcie M_0. W ten sposób współrzędne punktu M_1 są określone równościami

$$x_1 = x_0 + \Delta x_1, \qquad y_1 = y_0 + \Delta y_1 = y_0 + y'_0 \Delta x_1$$

3. W punkcie M_1 wykonujemy te same czynności co w punkcie M_0, tzn. podstawiając współrzędne tego punktu do prawej strony równania (167.1), obliczamy współczynnik kątowy

$$y'_1 = f(x_1, y_1)$$

obieramy drugi krok łamanej Δx_2, przez co wyznaczamy drugie ogniwo i drugi wierzchołek łamanej, tj. punkt M_2 o współrzędnych

$$x_2 = x_1 + \Delta x_2 \qquad y_2 = y_1 + \Delta y_2 = y_1 + y'_1 \Delta x_2$$

4. W punkcie M_2 wykonujemy te same czynności co w punkcie M_1 i w ten sposób konstruujemy łamaną $M_0 M_1 M_2 M_3 \ldots$, przestrzegając aby wszystkie kroki Δx_1, Δx_2, $\Delta x_3, \ldots$ były jednakowego znaku. Wyniki obliczeń zapisujemy w tablicy

	x_0	y_0	$y'_0 = f(x_0, y_0)$
Δx_1	$x_1 = x_0 + \Delta x_1$	$y_1 = y_0 + y'_0 \Delta x_1$	$y'_1 = f(x_1, y_1)$
Δx_2	$x_2 = x_1 + \Delta x_2$	$y_2 = y_1 + y'_1 \Delta x_2$	$y'_2 = f(x_2, y_2)$
Δx_3	$x_3 = x_2 + \Delta x_3$	$y_3 = y_2 + y'_2 \Delta x_3$	$y'_2 = f(x_3, y_3)$
...	....	....	....

Liczby napisane zewnątrz obramowania są obierane, liczby napisane wewnątrz obramowania są obliczane na podstawie prawej strony równania. Zwykle przyjmujemy $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x$ i liczbę Δx nazywamy *krokiem* łamanej.

Łamana Eulera wychodząca z punktu M_0 jest przybliżeniem krzywej całkowej $y = y(x)$ wychodzącej z punktu M_0. Inaczej mówiąc: rzędna łamanej odpowiadająca pewnej odciętej x jest przybliżeniem wartości $y(x)$ rozwiązania równania różniczkowego (167.1) przy warunku początkowym $y(x_0) = y_0$.

Przykład 167.1. Wyznaczyć rzędne łamanej Eulera dla równania

$$y' = y - x \tag{167.2}$$

obierając $x_0 = 0$, $y_0 = 0{,}5$ oraz krok $\Delta x = +0{,}1$. Ograniczyć się do trzech cyfr po przecinku.

	$x_0 = 0{,}0$	$y_0 = 0{,}5$	$y'_0 = y_0 - x_0 = 0{,}5$
0,1	$x_1 = 0{,}1$	$y_1 = 0{,}55$	$y'_1 = y_1 - x_1 = 0{,}45$
0,1	$x_2 = 0{,}2$	$y_2 = 0{,}595$	$y'_2 = y_2 - x_2 = 0{,}395$
0,1	$x_3 = 0{,}3$	$y_3 = 0{,}635$	$y'_3 = 0{,}335$
0,1	$x_4 = 0{,}4$	$y_4 = 0{,}668$	$y'_4 = 0{,}268$
...	....	....	....

Uwaga. Dokładne rozwiązanie tego równania ma postać $y = x+1-e^x/2$, skąd dla $x = 0{,}4$ mamy, $y = 0{,}654$. Metodą łamanej Eulera otrzymaliśmy $y_4 = 0{,}668$. Błąd względny $(0{,}668-0{,}654)/0{,}654 = 2\%$. Zagadnienia oceny błędu nie będziemy tu rozważać. Zagadnienie to jest przedmiotem odrębnej gałęzi matematyki, tzw. *metod numerycznych.*

Przykład 167.2. Wyznaczyć rzędne łamanej Eulera dla równania

$$y' = x+y^2 \tag{167.3}$$

obierając $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ oraz krok $\Delta x = 0{,}01$. Obliczyć rzędną dla $x = 0{,}2$. Pozostawiając Czytelnikowi wykonanie rachunków, podajemy odpowiedź $y_{20} = 1{,}268$.

Uwaga. Równanie (167.3) nie jest całkowalne elementarnie.

Istnienie rozwiązania. Krzywa całkowa równania (167.1), jeśli istnieje, powinna mieć w każdym swoim punkcie styczną o kierunku zgodnym z wartością prawej strony równania w tym punkcie. Łamana Eulera nie jest rozwiązaniem równania (167.1), gdyż tylko w wierzchołkach (i tylko jednostronnie) jej kierunek jest zgodny z równaniem, a w pozostałych punktach może nie być zgodny. Można sądzić, że konstruując ciąg łamanych Eulera o kroku dążącym do 0, otrzymamy ciąg łamanych zbieżny do krzywej całkowej. Niestety tak nie jest, gdyż ciąg taki może nie być zbieżny. Jednak, jak udowodnił PEANO, z ciągu takiego można wybrać podciąg zbieżny do krzywej całkowej, co stanowi jednocześnie metodę dowodu następującego twierdzenia (jest to dokładniejsze sformułowanie tw. 103.1).

Twierdzenie Peano o istnieniu rozwiązania

167.1. *Jeśli prawa strona równania różniczkowego*

$$y' = f(x, y) \tag{167.4}$$

jest funkcją ciągłą w prostokącie

$$G = \{(x, y): |x-x_0| \leqslant a, |y-y_0| \leqslant b\} \tag{167.5}$$

$a > 0$, $b > 0$ (rys. 167.2), *to istnieje co najmniej jedna funkcja*

$$y = y(x) \tag{167.6}$$

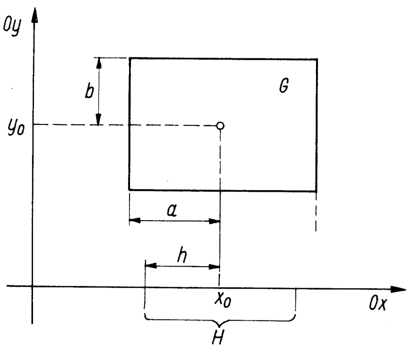
spełniająca warunek początkowy $y(x_0) = y_0$ *i będąca rozwiązaniem tego równania w przedziale*

$$H = \{x: |x-x_0| \leqslant h\} \tag{167.7}$$

gdzie

$$h = \min\{a, b/M\}, \qquad M = \max_G |f(x, y)| \tag{167.8}$$

w przypadku $M > 0$, *względnie* $h = a$ *w przypadku* $M = 0$.



Rys. 167.2

§168. Metoda kolejnych przybliżeń (Picarda)

Zamiana równania różniczkowego na równanie całkowe

168.1. *Jeśli prawa strona równania różniczkowego*

$$y' = f(x, y) \tag{168.1}$$

jest funkcją ciągłą w prostokącie G (rys. 167.2), *to równanie różniczkowe* (168.1) *z warunkiem początkowym*

$$y(x_0) = y_0 \tag{168.2}$$

jest równoważne równaniu całkowemu

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds \tag{168.3}$$

Uwaga. Równanie (168.3) nazywamy *całkowym*, gdyż niewiadoma funkcja występuje pod znakiem całki. Równanie to wyraża pewien związek między wartością niewiadomej funkcji dla argumentu x a wartościami tej funkcji dla wszystkich argumentów s leżących między x_0 i x.

Dowód. Wykażemy, że każde rozwiązanie równania (168.1) spełniające warunek początkowy (168.2) jest rozwiązaniem równania (168.3) oraz, na odwrót, że każde rozwiązanie równania (168.3) w przedziale zawierającym x_0 jest rozwiązaniem równania (168.1) spełniającym warunek początkowy (168.2).

1. Załóżmy, że pewna funkcja $u(x)$, ciągła w pewnym przedziale E, $x_0 \in E$, spełnia w tym przedziale równość

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

oraz warunek początkowy (x_0, y_0). Całkując tę równość obustronnie od x_0 do x, $x \in E$

$$\int_{x_0}^{x} u'(s)\,ds = \int_{x_0}^{x} f(s, u(s))\,ds$$

otrzymujemy równość

$$u(x) - u(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(s, u(s))\,ds$$

skąd, zgodnie z warunkiem początkowym $u(x_0) = y_0$, otrzymujemy

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, u(s))\,ds$$

co oznacza, że $u(x)$ spełnia w przedziale E równanie całkowe (168.3).

2. Załóżmy, że pewna funkcja $v(x)$, ciągła w pewnym przedziale E, $x_0 \in E$, spełnia w tym przedziale równość

$$v(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, v(s))\,ds$$

Różniczkując tę równość, otrzymujemy

$$v'(x) = f(x, v(x))$$

co oznacza, że funkcja $v(x)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego (168.1) w przedziale E. Przyjmując zaś górną granicę całkowania x równą x_0, otrzymujemy $v(x_0) = y_0$, co oznacza, że funkcja $v(x)$ spełnia warunek początkowy (168.2). ■

Ciąg kolejnych przybliżeń rozwiązania równania całkowego

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds \tag{168.4}$$

określamy w następujący sposób. W przedziale H [1] obieramy *funkcję wyjściową*

$$\varphi_0(x) = \text{const} = y_0 \qquad x \in H$$ [2]

Funkcję tę wstawiamy do prawej strony równania (168.4) w miejsce niewiadomej y. W wyniku tego podstawienia prawa strona tego równania staje się pewną funkcją

$$y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_0(s))\,ds \qquad x \in H$$

---

[1] Przedział H jest określony związkami (167.7) i (167.8).

[2] Za $\varphi_0(x)$ można przyjąć dowolną funkcję ciągłą w H, mającą wykres przechodzący przez (x_0, y_0) i nie wychodzący poza prostokąt G.

ciągłą w H, a jej wykres przechodzi przez (x_0, y_0) i jest zawarty w G (udowadniamy to na s. 15). Gdyby się okazało, że funkcja ta jest w przedziale H równa funkcji wyjściowej $\varphi_0(x)$, to oznaczałoby, że obierając $\varphi_0(x)$, natrafiliśmy na rozwiązanie równania (168.4). Na ogół tak nie jest, funkcja ta jest różna od funkcji wyjściowej; nazywamy ją *pierwszym kolejnym przybliżeniem* i oznaczamy $\varphi_1(x)$

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_0(s))\, ds \qquad x \in H \tag{168.5}$$

Z kolei, podstawiając funkcję $\varphi_1(x)$ do prawej strony równania (168.4), otrzymujemy pewną nową funkcję, którą oznaczamy $\varphi_2(x)$

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_1(s))\, ds \qquad x \in H \tag{168.6}$$

i którą nazywamy *drugim kolejnym przybliżeniem.*

Postępując w ten sposób, otrzymujemy *ciąg kolejnych przybliżeń*

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \varphi_{n+1}(x), \ldots \tag{168.7}$$

określonych wzorem

$$\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_n(s))\, ds \tag{168.8}$$

Przy założeniach, które poniżej precyzujemy, ciąg kolejnych przybliżeń jest zbieżny do pewnej *funkcji granicznej* $\varphi(x)$, która jest rozwiązaniem równania (168.4). Poszczególne zaś funkcje (168.7) są przybliżeniami tego rozwiązania.

Uwaga. Gdyby funkcja $\varphi_k(x)$ dla pewnego k okazała się rozwiązaniem równania (168.4), to zachodziłaby równość $\varphi_k(x) = \varphi_{k+1}(x) = \ldots = \varphi(x)$.

Twierdzenie Picarda o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania

168.2.[1] *Jeśli prawa strona równania*

$$y' = f(x, y) \tag{168.9}$$

jest funkcją ciągłą w prostokącie G i spełnia w tym prostokącie warunek Lipschitza względem y z pewną stałą N

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leqslant N\, |y - \bar{y}| \tag{168.10}$$

to w przedziale H istnieje dokładnie jedno rozwiązanie tego równania spełniające warunek początkowy (x_0, y_0). *Rozwiązaniem tym jest funkcja graniczna ciągu kolejnych przybliżeń* (168.7)

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) \tag{168.11}$$

[1] Jest to pełne sformułowanie tw. 103.2 z cz. II.