Walerian Dubnicki
Jacek Kłopotowski
Tomasz Szapiro

ANALIZA MATEMATYCZNA

Podręcznik dla ekonomistów

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN

ANALIZA MATEMATYCZNA

Podręcznik dla ekonomistów

Walerian Dubnicki
Jacek Kłopotowski
Tomasz Szapiro

ANALIZA MATEMATYCZNA

Podręcznik dla ekonomistów

Wydanie trzecie

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 2010

Rozdziały 1–6 podręcznika opracowano na podstawie skryptu
W. Dubnicki, T. Szapiro *Analiza matematyczna*, cz. 1
Szkoła Główna Planowania i Statystyki, Warszawa 1990

Projekt okładki i stron tytułowych
Małgorzata Podziomek

Redaktor inicjujący
Izabela Ewa Mika

Redaktor
Janusz E. Roguski

ISBN 978-83-01-16239-9

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
02-676 Warszawa, ul. Postępu 18
tel. 22 69 54 321
faks 22 69 54 031
e-mail: pwn@pwn.com.pl
www.pwn.com.pl

Przedmowa

Analiza matematyczna w zakresie przedstawionym w niniejszej książce w literaturze angielskiej nosi nazwę „calculus” od łacińskiego *calculus* — kamyk. Jak wiemy z historii, nazwa ta odwołuje się do czynności liczenia. Obliczenia, do których sprowadzano wiele problemów praktycznych, w przypadku zbyt dużego stopnia komplikacji dla prowadzącego rachunki, wspomagano kamykami przesuwanymi zgodnie z odpowiednimi regułami.

Nie wiadomo, czy dzisiejsze problemy są mniej czy bardziej skomplikowane od dawnych, wiadomo jednak na pewno, że rozwój matematyki dostarczył nowych, potężnych reguł wspomagających obliczenia dla celów praktycznych. Wiadomo też, że poszerzył się znacznie obszar problemów, które rozwiązujemy dziś metodami wykorzystującymi techniki matematyczne.

Znajomość rozumowań, które legły u podstaw metod matematycznych, to elementarz wykształcenia już nie tylko matematyka i fizyka, inżyniera czy artylerzysty. Coraz bardziej wyszukanymi metodami matematycznymi operują na co dzień finansiści i ekonomiści, analitycy i eksperci od zarządzania. Skutki ich decyzji są tak poważne i dotyczą tak szerokiego kręgu, że nie mogą pozwolić sobie na ryzyko popełnienia błędu metodologicznego i muszą dogłębnie rozumieć stosowane przez siebie techniki.

Tych kilka obserwacji wyznacza zakres i adresata tej książki. Przedstawiono w niej materiał podporządkowany potrzebom elementarnego aparatu matematycznego, który stosuje się dziś, aby zrozumieć zasady gospodarki i metody zarządzania w gospodarce. Dlatego Czytelnik znajdzie w książce obszerne ustępy rozwijające w stronę optymalizacji rachunek różniczkowy funkcji jednej i wielu zmiennych (racjonalna gospodarka to maksymalizacja zysku, minimalizacja strat i optymalne decyzje) oraz tradycyjnie wyłożoną teorię miary i całki, tak aby wyrobić intuicję potrzebną do rozumienia później rachunku prawdopodobieństwa i statystyki (racjonalna gospodarka to także umiejętne szacowanie ryzyka i zarządzanie nim).

Pisząc ten podręcznik, chcieliśmy przede wszystkim pomóc ekonomistom i specjalistom od zarządzania, proponując im język pomocny w formułowaniu problemów i narzędzie ich rozwiązywania. Tradycyjne podręczniki operują przykładami z fizyki i z geometrii — przykładami, a także rozumowaniami, które nie zawsze są dostosowane do wyobraźni i potrzeb dzisiejszego ich Czytelnika. Staramy się uzupełnić tę lukę.

W tekście podajemy wiele prostych do rozbudowania przykładów wprowadzających w ekonomię. Operujemy w zasadzie tylko przestrzeniami skończonego wymiaru, choć w pierwszym rozdziale podany zostaje cały aparat pojęciowy niezbędny do przeformułowania twierdzeń i przeprowadzenia dowodów w bardziej ogólnych przypadkach. Wszystkie rozdziały kończą się paragrafami prezentującymi materiał do ćwiczeń. Ponieważ istnieje wiele sprawdzonych zbiorów zadań przygotowanych specjalnie w celu doskonalenia techniki rachunkowej, przeto wyeliminowaliśmy zadania czysto rachunkowe.

W założeniu Autorów wszystkie te zabiegi mają służyć pięknej przygodzie, której na imię *analiza matematyczna*.

Formuła dydaktyczna zaprezentowana w książce jest owocem ponad dwudziestoletnich doświadczeń wielu osób, z którymi stykaliśmy się w trakcie naszej pracy w Szkole Głównej Handlowej. Dlatego pragniemy tu przypomnieć profesora Tadeusza Czechowskiego i doktora Zenona Galasa z dawnego SGPiSu, którzy zarysowali kształt tego wykładu, profesorów Igora Szczyrbę i Kazimierza Napiórkowskiego z Katedry Metod Matematycznych Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, którzy po raz pierwszy ten wykład realizowali w latach siedemdziesiątych, oraz bezimiennie kolegów z Katedry Matematyki SGPiS (później Instytutu Ekonometrii w SGPiS i SGH), którzy w gorących dyskusjach i bardzo nieraz ostrych sporach współtworzyli ten wykład.

Chcemy też gorąco podziękować redaktor Annie Szemberg za zachętę, za okazaną cierpliwość i pomoc przy pokonywaniu trudności w przygotowaniu do druku tego bardzo trudnego tekstu.

Autorzy

Przedmowa do wydania drugiego

Podręcznik, który przedstawiamy Czytelnikowi — po dwóch latach od pierwszego wydania — nie zmienił się radykalnie. Oczywiście dyskusje w trakcie korzystania z podręcznika przyniosły bogaty plon poprawek, które uwzględniliśmy w jego drugim wydaniu. Za pomocną i merytoryczną krytykę serdecznie dziękujemy naszym Kolegom, Recenzentom i Studentom.

W wyniku tej dyskusji zetknęliśmy się także z opiniami dotyczącymi koncepcji książki. Warto więc może wyjaśnić w tym miejscu, że zakładamy, iż podręcznik jest przeznaczony dla ekonomistów, a nie na przykład elektroników czy socjologów, z czego wynika odpowiedni dobór materiału, a nie przykładów. W konsekwencji wybraliśmy zestaw tematów z analizy matematycznej, których znajomość jest niezbędna, aby ekonomista mógł rozumieć współczesne prace ze swojej dziedziny. Z żalem zrezygnowaliśmy z równań różnicowych, analizy fourierowskiej i innych zagadnień wartych systematycznego omówienia.

Przetworzenie materiału teoretycznego w przykłady rzeczywistych zastosowań lub rozszerzenie książki o takie przykłady było niemożliwe z braku miejsca, natomiast przytaczanie nadmiernie uproszczonych przykładów i nazywanie ich ekonomicznymi uznaliśmy za niecelowe, a nawet szkodliwe. Nadal rezygnujemy też z typowych ćwiczeń i zadań z analizy matematycznej na korzyść problemów teoretycznych — istnieje wiele zbiorów zadań pozwalających utrwalić materiał problemowy i uzyskać biegłość w stosowaniu pojęć analizy matematycznej. Planujemy w przyszłości wydanie oddzielnego zbioru zadań przygotowanego pod kątem potrzeb Czytelnika ekonomisty — ma on być dopełnieniem tego podręcznika nastawionym na zastosowania. Obecnie, w drugim wydaniu książki tylko rozdział o równaniach różniczkowych został rozszerzony o przykłady dotyczące zastosowań. W przykładach tych jest położony nacisk na precyzyjne sformułowanie matematycznej poprawności prowadzonych wywodów i pokazanie charakteru wniosków, jakie można w zastosowaniu uzyskać.

Mamy nadzieję, że podręcznik będzie inspiracją do samodzielnego pogłębiania wiedzy w tej dziedzinie także dla Czytelników próbujących wykorzystać matematykę do zrozumienia ekonomii. Powinien znaleźć się w podręcznych biblioteczkach ekonomistów jako wygodny leksykon pojęć, twierdzeń oraz elementarnych metod stanowiących podstawę matematycznej analizy zjawisk ekonomicznych.

Styczeń 1999 r. *Autorzy*

Spis treści

1

Wiadomości wstępne

Intencją Autorów niniejszej książki jest wprowadzenie Czytelnika do tej gałęzi analizy matematycznej, którą nazywamy rachunkiem różniczkowym i całkowym funkcji jednej lub wielu zmiennych rzeczywistych. Aby jednak ten cel osiągnąć, potrzebny jest obszerny wstęp poświęcony oznaczeniom i podstawowym pojęciom analizy matematycznej. Lektura tego długiego i niełatwego tekstu ułatwi Czytelnikowi zrozumienie następnych rozdziałów.

Na rozdział pierwszy składają się następujące paragrafy:

1.1. Rachunek zdań
1.2. Rachunek kwantyfikatorów
1.3. Rachunek zbiorów
1.4. Relacje
1.5. Odwzorowania
1.6. Przestrzenie metryczne, unormowane i unitarne
1.7. Problemy i zadania

1.1. Rachunek zdań

Język matematyki, który jest pod bardzo wieloma względami podobny do języka potocznego, sam stał się przedmiotem zainteresowania matematyków. Analiza języka i badanie związku języka ze światem jego obiektów i znaczeń są przedmiotem dziedziny matematyki, którą potocznie nazywa się *logiką*. Brak miejsca nie pozwala na podanie większości ważnych pojęć i twierdzeń tej teorii. Zreferujemy tu szkicowo fragment tzw. *logiki formalnej*, zajmującej się badaniem schematów rozumowań, które niezawodnie prowadzą od prawdziwych przesłanek do prawdziwych wniosków. Przedstawimy te reguły wnioskowań, z których korzystamy w dalszych rozdziałach. Niniejszy paragraf posłuży także Czytelnikowi jako ćwiczenie w stosowaniu symboliki logicznej, z której (ze względu na jej precyzję i zwięzłość) korzystamy dalej.

Ograniczmy się do badania zdań, które mają określoną wartość logiczną, tzn. dla których można stwierdzić, czy zdanie jest prawdziwe czy fałszywe. Oto przykłady takich zdań: „$2+2 = 4$”, „$2 + 2 = 5$”, „$\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną” itp. Za to zdanie „Chodźmy na piwo” nie ma wartości logicznej, choć bez wątpienia wiele treści.

Jeśli zdanie p jest prawdziwe, to będziemy pisali $p \equiv 1$. W przeciwnym przypadku mamy $p \equiv 0$. Na zdaniach określone są, między innymi, następujące operacje logiczne: $\sim p$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ (czytamy je kolejno: nie p; p lub q; p i q; jeśli p, to q; p wtedy i tylko wtedy, gdy q). Noszą one nazwy: *negacji*, *alternatywy*, *koniunkcji*, *implikacji*, *równoważności*. Operacjom tym odpowiadają na mocy definicji wartości logiczne podane w tablicy 1 (jeśli wartość logiczna zdań p oraz q dana jest zgodnie z dwiema pierwszymi pozycjami, to dalsze pozycje definiują wartość odpowiedniej operacji na tych zdaniach).

Tablica 1

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Można teraz analizować zdania wypowiadane w rozumowaniach matematycznych, a także budować nowe, bardziej złożone wyrażenia i badać ich wartość logiczną. Na ogół wartość logiczna takiego wyrażenia zależy od tego, czy wyjściowe zdania są prawdziwe czy fałszywe. Istnieją jednak również takie wyrażenia, które niezależnie od interpretacji mają wartość logiczną 1 — są prawdziwe. Zdania takie nazywamy tautologami lub prawami rachunku zdań.

Przykład Rozważmy wyrażenie $p \vee \sim p$. Aby zbadać wartość logiczną tego wyrażenia, rozpatrujemy wszystkie możliwe wartości logiczne zdania p, z którego wyrażenie jest utworzone. Dla $p \equiv 1$ mamy $\sim p \equiv 0$, więc $p \vee \sim p \equiv 1$. Podobnie dla $p \equiv 0$ mamy

$\sim p \equiv 1$ i $p \vee \sim p \equiv 1$. Zapisujemy to zwykle w następującej tablicy:

Tablica 2

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
1	0	1
0	1	1

Ponieważ niezależnie od wartości logicznej zdania p mamy $p \vee \sim p \equiv 1$, więc badane wyrażenie jest tautologią.

Ten schemat postępowania nazywamy *metodą zero-jedynkową*. Wykorzystując tę metodę, łatwo można wykazać inne tautologie:

1.1 $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ *prawo sylogizmu*;

1.2 $(\sim t \Rightarrow \sim z) \Rightarrow (z \Rightarrow t)$ *prawo kontrapozycji*;

1.3 $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ *I prawo de Morgana*;

1.4 $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ *II prawo de Morgana*;

oraz *prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy* i *prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji*:

1.5 $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$,

1.6 $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$.

Aby udowodnić na przykład prawo kontrapozycji (1.2), czyli prawdziwość implikacji $(\sim t \Rightarrow \sim z) \Rightarrow (z \Rightarrow t)$, przy wszystkich możliwych interpretacjach zdań z oraz t, rozważmy następującą tablicę:

Tablica 3

<table>
<tr><th>z</th><th>t</th><th>$\sim z$</th><th>$\sim t$</th><th>$\sim t \Rightarrow \sim z$</th><th>$z \Rightarrow t$</th><th>(1.2)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Wypełniliśmy w niej tylko jeden wiersz odpowiadający interpretacji $z \equiv 1$ oraz $t \equiv 0$, pozostawiając analizę pozostałych przypadków Czytelnikowi. Prawo będzie wykazane, jeśli w ostatniej kolumnie otrzymamy same jedynki.

Prawo kontrapozycji wyraża zasadę: jeżeli z zaprzeczenia tezy pewnego twierdzenia wynika zaprzeczenie jego założeń, to z założeń wynika teza. Takie jest logiczne uzasadnienie stosowania w matematyce tzw. dowodów „nie wprost”. Zauważmy ponadto, że z prawa tego wynika natychmiast (jak?) równoważność zdań $z \Rightarrow t$ oraz $\sim t \Rightarrow \sim z$.

Prawa rachunku zdań ilustruje się często potocznymi przykładami. Prawo de Morgana o negacji koniunkcji ilustruje następujący przykład: zdanie „Nieprawda, że twoja żona jest piękna i wierna” oznacza, że „Nie jest ona piękna lub nie jest wierna”. Oczywiście to prawo nie przesądza o urodzie czy wierności żon, lecz orzeka, że jeśli prawdziwe jest pierwsze ze zdań, to prawdziwe jest wówczas zdanie drugie, i odwrotnie.

O niebezpieczeństwach wynikających z korzystania z takich przykładów opowiada następująca anegdota o Bertrandzie Russelu (przytaczamy ją za *Encyklopedią logiki*):

Tautologia $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ (jeśli nieprawda, że p, to z p wynika q), zwana jest *prawem Dunsa Scotusa*. W swobodnym sformułowaniu głosi ono, że z fałszu wynika dowolne inne zdanie, co brzmi paradoksalnie. Anegdota opowiada, jak słynny logik udowodnił komuś na poczekaniu, że jeśli $2 + 2 = 5$, to on sam (Russel) jest papieżem. Dowód przebiega następująco: „Odejmijmy od obu stron tej równości po trzy, otrzymujemy $1 = 2$. Jeśli więc pan twierdzi, że nie jestem papieżem, to papież i ja jesteśmy dwiema osobami. Zatem wobec $1 = 2$ papież i ja jesteśmy jedną osobą”. Widzimy, że z fałszywej przesłanki można dojść do nieoczekiwanego wniosku.

1.2. Rachunek kwantyfikatorów

Jeśli wyrażenie $f(x)$ jest zdaniem prawdziwym lub fałszywym dla każdego ustalonego x ze zbioru X, to $f(x)$ nazywamy *funkcją zdaniową zmiennej x* określoną na X (zbiór ten nazywamy *dziedziną funkcji zdaniowej*). Ograniczając zakres zmienności x do innego zbioru, otrzymujemy na ogół inną funkcję zdaniową. Jako przykład rozważmy wyrażenie $x + 1 = 5$, gdzie x jest liczbą rzeczywistą. Ta funkcja zdaniowa ma wartość logiczną 1 dla $x = 4$ oraz wartość logiczną 0 dla $x \neq 4$. Jeśli za dziedzinę przyjmiemy liczby nieparzyste, to wartość tej funkcji zdaniowej jest zawsze równa 0 (zdanie jest fałszywe dla każdego x).

Niech $\bigwedge_x f(x)$ oraz $\bigvee_x f(x)$ oznaczają odpowiednio zdania „dla każdego x jest spełnione $f(x)$" oraz „istnieje takie x, że jest spełnione $f(x)$". Słowa „jest spełnione", pomijane zwykle w takich zdaniach, uzmysławiają fakt, że chodzi o te elementy x z dziedziny, dla których wyrażenie $f(x)$ jest zdaniem prawdziwym. Symbole $\bigwedge$ oraz $\bigvee$ nazywamy odpowiednio *kwantyfikatorem ogólnym* i *szczegółowym* (egzystencjalnym)[1].

Zauważmy, że poprzedzenie funkcji zdaniowej kwantyfikatorem, tak jak podstawienie zamiast zmiennej konkretnego elementu z dziedziny, daje wyrażenie, które jest prawdziwe lub fałszywe, czyli *zdanie*. Na przykład, jeśli jako dziedzinę funkcji zdaniowej $x + 1 = 5$ przyjmiemy zbiór liczb rzeczywistych, to wyrażenie $\bigvee_x x+1 = 5$ jest zdaniem prawdziwym, a $\bigwedge_x x+1 = 5$ jest zdaniem fałszywym. Ograniczając się natomiast do zbioru liczb nieparzystych oba te zdania są fałszywe. Z przykładu widać, że przyjęty zapis może prowadzić do nieporozumień. Stąd też będziemy używali zapisu dokładniejszego, uwzględniającego podanie dziedziny, postaci $\bigwedge_{x\in X} f(x)$ oraz $\bigvee_{x\in X} f(x)$.

Ze zdań utworzonych z funkcji zdaniowych i kwantyfikatorów możemy budować (jak wspomnieliśmy wcześniej) za pomocą alternatywy, koniunkcji i innych operacji wyrażenia (zdania) złożone, a następnie badać ich wartość logiczną. Podobnie jak w rachunku zdań, niektóre z tych wyrażeń mają wartość logiczną 1 niezależnie od tego, czy zdania, z których są utworzone te wyrażenia, są prawdziwe czy fałszywe. Tego typu wyrażenia nazywamy *prawami rachunku kwantyfikatorów*. Najprostszymi z nich są prawa wyrażające związek negacji ze zdaniami utworzonymi za pomocą kwantyfikatorów:

1.7 $$\sim\Big(\bigwedge_{x\in X} f(x)\Big) \Leftrightarrow \bigvee_{x\in X} (\sim f(x)),$$

1.8 $$\sim\Big(\bigvee_{x\in X} f(x)\Big) \Leftrightarrow \bigwedge_{x\in X} (\sim f(x));$$

---

(1) Kwantyfikatory ogólny i szczegółowy oznacza się także symbolami $\forall$ i $\exists$ (odwrócone pierwsze litery słów angielskich „all" i „exist"). Używa się też symbolu $\vee!$ na oznaczenie zwrotu „istnieje dokładnie jeden".