

Karol Kukuła  
Antoni Goryl  
Zbigniew Jędrzejczyk  
Jacek Osiewalski  
Anna Walkosz

---

# Wprowadzenie do ekonometrii

Redaktor inicjujący **Dorota Ostrowska-Furmanek**

Redaktor **Ewa Szczepańska**

Recenzenci: **prof. dr hab. Walenty Ostasiewicz**  
**prof. dr hab. Józef Zając**

Copyright © by Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
Warszawa 2009

ISBN 978-83-01-15671-8

Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
02-676 Warszawa, ul. Postępu 18  
tel. 022 69 54 321  
faks 022 69 54 031  
e-mail: [pwn@pwn.com.pl](mailto:pwn@pwn.com.pl)  
[www.pwn.pl](http://www.pwn.pl)

# Spis treści

Słowo wstępne . . . . .	9
<b>1. Ekonometria jako dyscyplina naukowa i jej miejsce w gospodarce rynkowej . . . . .</b>	<b>13</b>
1.1. Czym jest ekonometria . . . . .	13
1.2. Pojęcie modelu ekonometrycznego oraz terminologia związana z modelowaniem . . . . .	14
1.3. Rola czynnika losowego . . . . .	16
1.4. Klasyfikacja modeli ekonometrycznych . . . . .	17
1.5. Etapy budowania modelu . . . . .	20
1.6. Trochę historii . . . . .	22
1.7. Ekonometria dziś i jutro . . . . .	24
<b>2. Modele jednorównaniowe liniowe . . . . .</b>	<b>26</b>
2.1. Definicja modelu regresji liniowej . . . . .	26
2.2. Wybór zmiennych objaśniających do modelu ekonometrycznego . . . . .	27
2.2.1. Metoda pojemności informacyjnej Hellwiga . . . . .	29
2.2.2. Metoda analizy grafów . . . . .	33
2.3. Estymacja modelu . . . . .	36
2.3.1. Klasyczny model regresji liniowej — założenia . . . . .	36
2.3.2. Klasyczna metoda najmniejszych kwadratów . . . . .	37
2.4. Weryfikacja modelu . . . . .	52
2.4.1. Ocena dobroci dopasowania modelu do danych empirycznych . . . . .	52
2.4.2. Testowanie parametrów strukturalnych modelu . . . . .	53
2.4.3. Badanie założeń o składnikach losowych . . . . .	61
2.5. Merytoryczna interpretacja parametrów strukturalnych oszacowanych modeli . . . . .	77
2.6. Uogólniony model regresji liniowej (UMRL) . . . . .	78
2.6.1. Definicja — założenia . . . . .	79
2.6.2. Estymacja — uogólniona MNK . . . . .	79
Zadania . . . . .	89
<b>3. Modele nieliniowe . . . . .</b>	<b>113</b>
3.1. Charakterystyka wybranych modeli nieliniowych . . . . .	113
3.2. Estymacja MNK modeli transformowalnych do postaci liniowej . . . . .	121
3.2.1. Modele liniowe względem parametrów . . . . .	122
3.2.2. Modele nieliniowe względem zmiennych i parametrów . . . . .	129

3.3. Modele ściśle nieliniowe . . . . .	139
3.3.1. Nieliniowa MNK — algorytm Gaussa–Newtona . . . . .	140
3.3.2. Wybrane przykłady . . . . .	145
Zadania . . . . .	156
<b>4. Predykcja na podstawie modeli jednorównaniowych . . . . .</b>	<b>169</b>
4.1. Uwagi wstępne . . . . .	169
4.2. Klasyczna predykcja na podstawie modeli przyczynowo-opisowych . . . . .	170
4.3. Modele tendencji rozwojowej jako narzędzie predykcji . . . . .	177
4.4. Wybrane modele adaptacyjne w procesie predykcji . . . . .	186
4.4.1. Metoda wyrównywania wykładniczego . . . . .	186
4.4.2. Metoda wag harmonicznych . . . . .	190
4.5. Predykcja na podstawie modeli trendów z wahaniami periodycznymi . . . . .	194
4.5.1. Predykcja metodą wskaźników sezonowości . . . . .	195
4.5.2. Predykcja na podstawie modeli trendów jednoimiennych okresów . . . . .	199
Zadania . . . . .	202
<b>5. Analiza procesu produkcyjnego . . . . .</b>	<b>218</b>
5.1. Uwagi wstępne . . . . .	218
5.2. Funkcja produkcji . . . . .	218
5.2.1. Modele produkcji . . . . .	218
5.2.2. Analiza własności funkcji produkcji . . . . .	220
5.2.3. Funkcja produkcji typu Cobba–Douglasa . . . . .	224
5.2.4. Funkcja produkcji typu CES . . . . .	237
5.2.5. Funkcja translog . . . . .	245
5.2.6. Badanie efektów postępu techniczno-organizacyjnego . . . . .	250
5.3. Funkcje wydajności pracy . . . . .	253
5.4. Ekonometryczne modele kosztów . . . . .	260
Zadania . . . . .	270
<b>6. Elementy ekonometrycznej analizy rynku . . . . .</b>	<b>290</b>
6.1. Wybrane modele rozkładu dochodów . . . . .	290
6.2. Ekonometryczna analiza popytu konsumpcyjnego . . . . .	314
6.2.1. Makroekonomiczne funkcje popytu . . . . .	316
6.2.2. Mikroekonomiczne funkcje popytu . . . . .	326
6.3. Analiza struktur wydatków i ich zróżnicowania . . . . .	346
Zadania . . . . .	352
<b>7. Liniowe modele wielorównaniowe . . . . .</b>	<b>375</b>
7.1. Przykłady ekonomiczne . . . . .	375
7.1.1. Teoria konsumenta — systemy wydatków . . . . .	375
7.1.2. Teoria firmy — równania popytu na czynniki produkcji . . . . .	377
7.1.3. Modele rynku w stanie równowagi . . . . .	379
7.1.4. Modele gospodarki . . . . .	381
7.2. Postacie i klasy modeli . . . . .	383
7.2.1. Postać strukturalna i zredukowana . . . . .	383
7.2.2. Macierz równoczesnych kowariancji . . . . .	388
7.2.3. Modele proste, rekurencyjne i współzależne . . . . .	390
7.3. Wprowadzenie do estymacji . . . . .	392
7.3.1. Stosowalność zwykłej MNK . . . . .	392

7.3.2. Identyfikowalność modelu współzależnego . . . . .	396
7.3.3. Pośrednia MNK . . . . .	399
7.3.4. Dwustopniowa (podwójna) MNK . . . . .	400
7.4. Wykorzystanie modeli wielorównaniowych . . . . .	405
7.4.1. Prognozowanie . . . . .	405
7.4.2. Postać końcowa i analiza mnożnikowa . . . . .	408
Zadania . . . . .	413
<b>Odpowiedzi do zadań . . . . .</b>	<b>418</b>
<b>Test . . . . .</b>	<b>468</b>
<b>Literatura . . . . .</b>	<b>478</b>
<b>Indeks . . . . .</b>	<b>483</b>

***Przypadek rządzi ponad  
połowę naszych działań,  
my kierujemy resztą.***

*Niccolo Machiavelli*

# Słowo wstępne

Idea wielkiego myśliciela epoki włoskiego renesansu Niccolo Machiavellego przytoczona jako motto ma na celu określenie w sposób możliwie najbardziej zwięzły punktu widzenia autorów na procesy zachodzące w życiu gospodarczym i zaakcentowanie możliwości występowania zdarzeń losowych również w tej dziedzinie. Ma ponadto uzmysłowić rolę przypadku wszystkim studiującym, a tym samym skłonić do stosowania stochastycznego podejścia we wszystkich interpretacjach analiz i prognoz ekonometrycznych realizowanych w sferze zjawisk społeczno-gospodarczych.

Podręcznik, który trafia do rąk Czytelnika, ma już swoją wcale niekrótką historię. Jej początki sięgają lat osiemdziesiątych ubiegłego stulecia. W 1981 r. w krakowskiej Akademii Ekonomicznej ujrzał światło dzienne skrypt uczelniany zatytułowany *Zbiór zadań z ekonometrii opisowej*. Skrypt miał dwa wydania: w 1981 i 1986 r. Zbiór ten jest prapropozycją dzisiejszego podręcznika. Jego redaktorem naukowym był nieżyjący już — uznawany przez cały nasz zespół za Nauczyciela i Profesora — Jan Czyżyński.

Na bazie *Zbioru zadań*... w 1996 r. powstała kolejna pozycja, rozszerzona i ulepszona, a mianowicie wydany przez Wydawnictwo Naukowe PWN podręcznik *Wprowadzenie do ekonometrii w przykładach i zadaniach* pod redakcją Karola Kukuły. Mija już dwanaście lat od pojawienia się pierwszego wydania *Wprowadzenia*... W tym czasie ukazało się drugie poprawione i rozszerzone wydanie; ukazywały się też liczne dodruki, co świadczy o dużym zainteresowaniu i zapotrzebowaniu na ten rodzaj pomocy dydaktycznej.

Obecnie zespół autorski doszedł do przekonania, iż nadszedł czas na modernizację książki. Nowy podręcznik bazując na układzie obu wydań *Wprowadzenia do ekonometrii w przykładach i zadaniach* (1996 i 1999), wzbogaca je o dodatkowy element w postaci niezbędnej dawki teorii poprzedzającej zadania. Dane empiryczne, będące osnową niektórych przykładów i zadań, zaktualizowano, wiele z nich wymieniono na inne, a także dołączono nowe. Całość tak skomponowano, aby podręcznik stał się w pełni wystarczającą pomocą naukową dla studenta, nie zmuszając go do sięgania po inne pozycje. Oczywiście, pragnący poszerzyć zakres swej wiedzy powinni wertować podręczniki i monografie różnych autorów. Dokonane zmiany i uzupełnienia w pełni uzasadniają nowy tytuł podręcznika *Wprowadzenie do ekonometrii*.

Książka przeznaczona jest dla osób studiujących ekonomię oraz zarządzanie zarówno w trybie stacjonarnym, jak i zaocznym, a także dla wykonawców określonych zadań

badawczych wymagających znajomości metod ekonometrycznych. Zamieszczone przykłady, stanowiące miniatury rzeczywistych problemów badawczych, i ich rozwiązania sprzyjają samodzielnemu studiowaniu przedmiotu również w warunkach domowych. Zaproponowane zmiany, w naszym przekonaniu, podnoszą walory dydaktyczne podręcznika, czyniąc go bardziej autonomicznym; jego zawartość obejmuje treści programowe zarówno wykładów jak i ćwiczeń.

Nastanie gospodarki rynkowej w Polsce i jej rozwój sprawia, iż metody ekonometryczne oraz związane z nimi prognozowanie i symulacje gospodarcze cieszą się coraz większym uznaniem i zapotrzebowaniem społecznym. Znajdują liczne zastosowania w skali zarówno mikro-, jak i makrogospodarki. Wszystko to stanowi istotną przesłankę doskonalenia już istniejących i powstawania nowych pomocy dydaktycznych, mających za zadanie ułatwianie percepcji niezbędnej wiedzy z zakresu ekonometrii. Przedstawione argumenty są, jak się wydaje, wystarczającym uzasadnieniem podjęcia decyzji napisania tej książki.

Struktura każdego z rozdziałów (oprócz pierwszego) jest niezmienna. Na rozdział składa się: omówienie teoretyczne zagadnienia, prezentacja przykładów, a następnie zestaw zadań. Przykłady oraz zadania korespondują z treścią merytorycznego wykładu na temat określony w tytule rozdziału. Przykłady i zadania są numerowane w sposób ciągły, tzn. każdy przykład i każde zadanie ma swój numer, który się nie powtarza.

**Rozdział pierwszy** wprowadza Czytelnika w „świat ekonometrii”. Omawia się zatem sam termin „ekonometria”, jego genezę oraz przedstawia próby jego zdefiniowania. Opisuje się związki łączące ekonometrię z innymi dyscyplinami naukowymi. Szczegółne miejsce poświęca się modelom ekonometrycznym jako podstawowym narzędziom dyscypliny. Omawia się problem losowości w ekonomii i ekonometrii. Przedstawia etapy budowy modeli ekonometrycznych, a następnie prezentuje ich klasyfikacje w oparciu o różne kryteria. Odrębna jego część przypada na zarys historii owej młodej dyscypliny, jaką jest ekonometria oraz próbę określenia roli, jaką ma do odegrania obecnie. Rozdział nie zawiera ani przykładów, ani zadań.

**Rozdział drugi** zawiera omówienie podstawowej klasy modeli, jaką są jednorównaniowe modele liniowe. Szczególną uwagę zwrócono na problem wyboru zmiennych objaśniających. Głównym tematem rozdziału są zagadnienia związane z estymacją modelu, tj. z szacowaniem parametrów strukturalnych oraz parametrów struktury stochastycznej modelu. Mocny akcent położono na problematykę weryfikacji, czyli wszechstronnego sprawdzenia jakości oszacowanego modelu. Kolejny punkt rozdziału stanowi uogólniony model regresji liniowej, jego definicja i założenia. Pokazano w nim zastosowanie uogólnionej metody najmniejszych kwadratów.

W **rozdziale trzecim** przedstawiono zagadnienia związane z jednorównaniowymi modelami nieliniowymi. Dokonano charakterystyki wybranych modeli nieliniowych łącznie z omówieniem sposobów wyboru postaci analitycznej. Kolejno przedstawiono estymację modeli nieliniowych (sprowadzalnych do postaci liniowej) przy zastosowaniu metody najmniejszych kwadratów (MNK). Wiele miejsca poświęcono nieliniowej MNK — algorytm Gaussa–Newtona. Opisane podejście z zastosowaniem algorytmu Gaussa–Newtona zilustrowano przykładami, szacując funkcje Törnquista oraz funkcje sigmoidalne.



**Rozdział czwarty** traktuje o technikach budowy prognoz bazujących na jednorównaniowych modelach ekonometrycznych. Zaprezentowano predykcję z wykorzystaniem modeli przyczynowo-opisowych oraz tendencji rozwojowej. Przedstawiono również techniki budowy prognoz w przypadku występowania wahań sezonowych. Osobno potraktowano prognozy, w których jako predyktor występują trendy jednoimiennych okresów. Ostatnim tematem są wybrane metody adaptacyjne jako narzędzia predykcji.

**Piąty rozdział** jest poświęcony ekonometrycznym metodom pomocnym w analizie procesu produkcyjnego. Omówiono funkcje produkcji Cobba–Douglasa, CES oraz translog — Leontieffa. Osobno omówiono analizę neutralnego postępu techniczno-organizacyjnego w zdynamizowanej przez Jana Tinbergena funkcji produkcji Cobba–Douglasa. Następnie przedstawiono modele opisujące kształtowanie się wydajności pracy oraz kosztów.

Elementy ekonometrycznej analizy rynku są tematem **rozdziału szóstego**. Analizę otwiera omówienie niektórych rozkładów dochodów ludności jako podstawowego czynnika kreującego popyt. Dalej opisano zastosowanie mikro- i makroekonomicznych funkcji popytu. Rozdział zamyka opis metod badania struktur ekonomicznych wraz z odpowiednią ilustracją w postaci przykładów.

**Rozdział siódmy** obejmuje problematykę modelowania wielorównaniowego. Zagadnienia związane z konstrukcją modeli wielorównaniowych nie należą do łatwych i od strony dydaktycznej są znacznie słabiej prezentowane w literaturze przedmiotu. Stąd rozdział ten otwierają przykłady ekonomiczne, w których punktem wyjścia są rozważania w mikroskali, po czym następuje przejście do problematyki modelowania gospodarki jako całości (makroskala). Kolejno omówiono postacie i klasy modeli wielorównaniowych. Wprowadzenie do estymacji przedstawia warunki stosowalności MNK, pośredniej MNK oraz dwustopniowej (podwójnej) MNK wraz z przykładami. Rozdział zamyka krótkie omówienie zastosowań modeli wielorównaniowych w budowie prognoz oraz wykorzystania analizy mnożnikowej.

Następnie zamieszczono **odpowiedzi** do zadań, w postaci zwięźle opracowanych wyników, bez prezentacji toku rozwiązania, który to zawierają przykłady. Książkę uzupełnia przykładowy egzamin w formie **testu** wraz z rozwiązaniem. Całość kończy wykaz wybranych pozycji z **literatury** przedmiotu oraz **indeks**.

W ostatnim zdaniu chcę w imieniu zespołu autorów wyrazić wdzięczność recenzentom: Prof. dr hab. Walentemu Ostasiewiczowi oraz Prof. dr hab. Józefowi Zajacowi za cenne spostrzeżenia i uwagi, które podnosząc jakość podręcznika, stanowią zarazem jakąś część myśli w nim zawartych.

*Karol Kukuła*

Kraków, grudzień 2008 r.



# Ekonometria jako dyscyplina naukowa i jej miejsce w gospodarce rynkowej

## 1.1. Czym jest ekonometria

**Ekonometrię** można traktować jako naturalne „dziecko” uniwersalnej dyscypliny naukowej, jaką jest *statystyka*. **Statystyka** powstała znacznie wcześniej niż **ekonometria**, wypracowała też szereg oryginalnych metod badawczych i dostarcza jej narzędzi uprzednio wypróbowanych w różnych dziedzinach, w których występuje losowość zdarzeń i ograniczona pewność wnioskowania.

Termin *ekonometria* powstał ze złożenia dwóch słów pochodzących z języka greckiego: „*oekonomia*”, czyli gospodarka, oraz „*metreo*”, czyli mierzyć. Razem wzięte pozwalają interpretować *ekonometrię* jako naukę podejmującą zadanie pomiaru zależności zachodzących w gospodarce. Zatem nie chodzi tu o mierzenie bezpośrednio, np. wielkości produkcji, sprzedaży czy innych kategorii ekonomicznych, lecz o uchwycenie relacji, jakie zachodzą między zjawiskami ekonomicznymi oraz o ich wykorzystanie w analizie i przewidywaniu, a niekiedy w symulacji. Jak wynika z przeprowadzonych rozważań, niełatwo jest udzielić jednoznacznej odpowiedzi na postawione na wstępie pytanie. Niektórzy ekonometrycy, do których zalicza się S. Bartosiewicz, uważają, że *ekonometria* jest częścią *statystyki*, „zajmującą się badaniem związków, relacji pomiędzy zjawiskami natury ekonomicznej” ([9], s. 12). To nic innego zatem, jak *statystyka w ekonomii*. Niewątpliwie jest wiele racji w tym stwierdzeniu, zwłaszcza gdy chodzi o początki ekonometrii. Ale prawdą jest również, iż klasycy *ekonometrii* wypracowali wiele nowych metod ujmujących specyfikę zjawisk ekonomicznych, związanych z ich modelowaniem. Wszystkie te osiągnięcia uprawniają egzystowanie *ekonometrii* jako odrębnej dziedziny wśród dyscyplin z zakresu nauk ekonomicznych. Zresztą w bardzo podobny sposób powstała i osiągnęła kolejne etapy rozwoju dyscyplina o nazwie *biometria*. Również ona czerpała i nadal czerpie ze źródła, którym jest *statystyka*.

Podsumowaniem rozważań nad pojmowaniem słowa *ekonometria* niech będzie przytoczenie dwóch bardzo podobnych określeń omawianego terminu, autorstwa prekursorów ekonometrii w Polsce — profesorów Oskara Lange oraz Zbigniewa Pawłowskiego. Według Oskara Lange ([91], s. 11), „**ekonometria to nauka zajmująca się ustalaniem za pomocą metod statystycznych konkretnych, ilościowych prawidłowości zachodzących w życiu gospodarczym**”. Bardzo podobnie, lecz z podkreśleniem większej

autonomiczności dyscypliny, definiuje to pojęcie Zbigniew Pawłowski. Według niego ([110], s. 15) „**ekonometria jest nauką o metodach badania ilościowych prawidłowości występujących w zjawiskach ekonomicznych za pomocą odpowiednio wyspecjalizowanego aparatu matematyczno-statystycznego**”.

Z przywołanych określeń terminu *ekonometria* wynika, że dyscyplina ta jest ściśle związana z **teorią ekonomii** oraz z **matematyką** i jej gałęzią zwaną **statystyką matematyczną**. Pogląd ten podziela R. Frisch, jeden z klasyków ekonometrii, który stwierdza: „Doświadczenie pokazuje, że każda z tych trzech dziedzin, tj. statystyka, teoria ekonomii i matematyka, jest potrzebna, ale sama w sobie nie stanowi wystarczającego warunku do pełnego zrozumienia związków ilościowych we współczesnym życiu ekonomicznym. Dopiero połączenie tych trzech dziedzin daje potężne narzędzie i ono konstituuje ekonometrię” ([41]). Widoczne są również pewne związki ekonometrii z *ekonomią matematyczną* oraz z *badaniami operacyjnymi*, nazywanymi także *programowaniem matematycznym*. Również *analiza wielowymiarowa* często znajduje wspólne ścieżki z modelowaniem ekonometrycznym. *Ekonometria* pozwala modelować złożone procesy gospodarcze, dostarczając tym samym narzędzi do budowy prognoz oraz do dokonywania symulacji. Tym samym pojawiają się kolejne relacje łączące *ekonometrię* z *prognozowaniem* i *symulacją*.

Stosunkowo od dość dawna ekonometrię zaczęto pojmować w dwojaki sposób: *sensu stricto* oraz *sensu largo*. Ekonometria pojmowana w pierwszy sposób to teoria budowy modeli ekonometrycznych wraz z ich wykorzystaniem w praktyce. *Ekonometria sensu largo* oprócz modelowania obejmuje takie dziedziny jak: *badania operacyjne*, *analizę wielowymiarową*, *prognozowanie* i *symulacje*, a także *ekonomię matematyczną*. Wszystkie te dziedziny łączy jedność wykorzystywanych metod o charakterze matematyczno-statystycznym. Jednakże wnikając głębiej w specyfikę wymienionych przedmiotów, należy podkreślić, iż każdy z nich ma odrębnie zakreślony obszar badawczy oraz posługuje się specjalnie dobranymi, sobie właściwymi metodami, a zatem są dyscyplinami autonomicznymi. Biorąc to wszystko pod uwagę, wypada zgodzić się z poglądem S. Bartosiewicza ([9], s. 12), iż „*ekonometrię należy traktować sensu stricto*”.

## 1.2. Pojęcie modelu ekonometrycznego oraz terminologia związana z modelowaniem

Podstawowym narzędziem ekonometrii jest model ekonometryczny. Ekonometria badając ilościowe zależności zachodzące między zjawiskami ekonomicznymi, musi dysponować określonymi narzędziami. W rozpatrywaniu wspomnianych relacji narzędziami przydatnymi w praktyce są **modele ekonometryczne**. Pojęcie modelu występuje niemal w każdej dyscyplinie naukowej. Dlatego w rozważaniach o modelowaniu ekonometrycznym przytoczymy ogólną definicję modelu, sformułowaną przez I.D.J. Brossa [14]. Według tegoż autora, **model to uproszczone odwzorowanie rzeczywistości**. Łatwo zauważyć, iż określenie to ma charakter na tyle ogólny, iż jest właściwe dla modeli występujących w różnych dziedzinach nauki. Warto zwrócić uwagę na trzy ostatnie słowa: uproszczone odwzorowanie rzeczywistości. W tym kontekście słowo

„uproszczone” oznacza uwzględnienie w modelu jedynie tych elementów rzeczywistości, które są najważniejsze, i pominięcie elementów mniej istotnych. Definicja modelu Brossa znajduje odbicie w definicji modelu ekonometrycznego sformułowanej przez Zbigniewa Pawłowskiego, przedwcześnie zmarłego polskiego ekonometryka, autora wielu podręczników i monografii z zakresu statystyki oraz ekonometrii.

**„Model ekonometryczny jest to konstrukcja formalna, która za pomocą pewnego równania lub układu równań przedstawia zasadnicze powiązania występujące pomiędzy rozpatrywanymi zjawiskami ekonomicznymi”** (Z. Pawłowski [110], s. 35). Z definicji tej wynika, iż model ekonometryczny należy postrzegać jako równanie (lub układ równań) przedstawiające ważne relacje występujące w gospodarce. W dalszej części tego rozdziału będzie mowa tylko o modelach jednorównaniowych, jako że modelom wielorównaniowym poświęcono odrębny rozdział.

Relacje między zjawiskami ekonomicznymi zwykle są bardzo złożone, a niekiedy wzajemnie sprzężone. Na opisywane przez model zjawisko zwykle wpływa duża liczba czynników. Z tym, iż oddziaływanie niektórych czynników jest silne i trwałe (tych zwykle występuje niewiele), innych zaś zdecydowanie słabsze i nietrwałe. Do tego dochodzi wpływ tzw. czynników losowych, występujących sporadycznie i nieregularnie. W modelu uwzględniamy tylko czynniki główne, istotnie wpływające na opisywane zjawisko. Natomiast pomijamy czynniki słabo oddziałujące oraz czynniki czysto losowe. Pozostaje to w pełnej zgodności zarówno z ogólną definicją modelu Brossa, jak i z określeniem modelu ekonometrycznego sformułowanym przez Pawłowskiego.

Ogólnie model ekonometryczny jednorównaniowy można zapisać w następujący sposób:

$$Y = f(X_1, \dots, X_K; \varepsilon), \quad (1.1)$$

gdzie:  $Y$  — zmienna objaśniana (endogeniczna) reprezentuje zjawisko modelowane;  $X_1, \dots, X_K$  — zmienne objaśniające;  $\varepsilon$  — zmienna losowa zwana zakłóceniem losowym;  $f$  — postać analityczna modelu;  $K$  — liczba zmiennych objaśniających ( $j = 1, \dots, K$ ).

Uwzględnienie składnika losowego w równaniu nadaje modelowi ekonometrycznemu charakter związku stochastycznego. Ta sama relacja bez uwzględnienia składnika losowego ma charakter związku deterministycznego, który przyjmuje postać:

$$Y = f(X_1, \dots, X_K). \quad (1.2)$$

W równaniu (1.2) symbolem  $Y$  oznaczono zmienną zależną, a  $X_1, \dots, X_K$  zmienne niezależne.

W modelu ekonometrycznym (1.1) zamiast zmiennych niezależnych występują zmienne objaśniające, które opisują kształtowanie się zmiennej endogenicznej (objaśnianej). Należy jednak pamiętać, iż obecność zmiennej losowej  $\varepsilon$  w modelu ekonometrycznym o postaci (1.1) powoduje, że wnioskowanie na podstawie oszacowanych jego parametrów ma tylko przybliżony charakter.

### 1.3. Rola czynnika losowego

O tym, że w gospodarce zdarzają się różne niespodziewane przypadki losowe, wywierające niejednokrotnie potężny wpływ na jej rozwój, obecnie nikogo nie trzeba przekonywać. Jako pierwszy z brzegu przykład rozważmy zdarzenie losowe polegające na wystąpieniu zjawiska suszy w danym roku. Co to oznacza z ekonomicznego punktu widzenia? Otóż rolnicy ponieśli koszty związane z zasiewem, sadzeniem, nawożeniem, opryskami oraz innymi zabiegami agrotechnicznymi, spodziewając się określonej wielkości plonu. Tymczasem występująca w całym kraju susza jako efekt kaprysu aury, a więc zdarzenia losowego, zmniejsza spodziewany plon np. o 40%. Przypadek ten ma liczne reperkusje. Obniża w istotnym stopniu produkt krajowy brutto (PKB) oraz dochodowość indywidualnych gospodarstw. Powoduje również spadek produkcji zwierzęcej w roku przyszłym. W niektórych gospodarstwach w zestawieniu nakłady–przychody występuje ujemne saldo. Sytuacja taka zmusza do zaciągania kredytów, ogranicza lub wręcz uniemożliwia inwestowanie, wpływając tym samym hamująco na poziom dalszego rozwoju gospodarstw.

Kolejnym przykładem niech będzie zdarzenie losowe ze świata polityki. Trwają niepokoje na Bliskim Wschodzie. Wyobraźmy sobie, że którejś ze stron konfliktu udaje się dokonać zamachu na ważną osobistość z obozu przeciwnika. Zamach ten wywołuje zaostrzenie stosunków i w konsekwencji prowadzi do wybuchu wojny lokalnej. Powszechnie wiadomo, iż terytoria bliskowschodnie stanowią najważniejsze źródło ropy naftowej na świecie. Wywołany konflikt ogranicza lub uniemożliwia wydobycie tego surowca w tym regionie. Poważne zmniejszenie podaży strategicznego surowca, jakim jest ropa naftowa, musi skutkować znaczną wyższą jego cen. Ma to ogromny wpływ na gospodarki krajów nieposiadających własnych zasobów ropy, prowadzi do wzrostu cen prawie wszystkich towarów, a w konsekwencji do wystąpienia kryzysu gospodarczego. Powróćmy jednak do źródeł przytoczonej historii. Otóż powodzenie lub niepowodzenie zamachu zależy, jak łatwo zauważyć, od bardzo wielu czynników, które trudno przewidzieć i które mogą, ale nie muszą, wystąpić. Ma zatem charakter losowy. Tym samym spirala następstw tego przypadku wykazuje również cechy losowości. Można przytoczyć jeszcze wiele innych przypadków losowych, które wywierają znaczący wpływ na gospodarke zarówno w skali makro, jak i mikro.

Znaczne, skokowe zmiany różnych wielkości ekonomicznych znajdują przełożenie na wyniki modelowania ekonometrycznego. Sprawiając tym samym, iż wnioskowanie w przyszłość, związane z przewidywaniem tych wielkości, jest w dużej mierze utrudnione. Nie oznacza to jednak, że należy zaniechać modelowania stanowiącego podstawę budowy prognoz w dziedzinie gospodarki. Prognozowanie bowiem jest niezbędnym elementem programowania wszystkich dziedzin życia gospodarczego. Nie należy tracić z pola widzenia faktu, iż prognozy ekonometryczne mają charakter warunkowy, tzn. spełniają się, ale przy założeniu, że warunki i czynniki oddziałujące na prognozowane zjawisko w przeszłości będą w tym samym stopniu wpływać na to zjawisko w przyszłości. Czynniki losowe powoduje, iż w praktyce nie ma gwarancji zaistnienia tak stabilnego układu.

Zatem opinie (wnioski) o przewidywanych rozmiarach zjawisk na podstawie modeli ekonometrycznych mają charakter przybliżony, nazywany często przedziałem wielkości.

Idąc dalej, przewidywane wielkości analizowanego zjawiska określa stopień prawdopodobieństwa ich realizacji.

Przytoczone przykłady ukazują działanie czynnika losowego w gospodarce uzasadniając niejako występowanie zmiennej losowej  $\varepsilon$  w ogólnym zapisie jednorównaniowego modelu ekonometrycznego o wzorze (1.1). Zmienna  $\varepsilon$  generuje również oddziaływania nieuwzględnionych *explicite* w modelu zmiennych objaśniających. Fakt ten wynika z istoty modelu, który będąc konstrukcją uproszczoną, nie może absorbować wszystkich zmiennych w jakikolwiek sposób wpływających na zmienną objaśnianą  $Y$  poza tymi, które uznano za przyczyny główne, kreujące opisywane zjawisko. Zmienną losową  $\varepsilon$  tworzą ponadto błędy związane z pomiarem zmiennych:  $Y$  oraz  $X_1, \dots, X_K$ . Kolejną częścią składową zmiennej losowej  $\varepsilon$  mogą być błędy wynikające z niewłaściwie dobranej postaci analitycznej modelu ( $f$ ) oraz błędy popełnione przy wyborze zmiennych objaśniających.

Przystępując do wnioskowania na podstawie modelu ekonometrycznego, należy zatem pamiętać, że zmienna objaśniana  $Y$ , podobnie jak składnik losowy  $\varepsilon$ , jest zmienną losową. Dotyczy to wnioskowania o charakterze zarówno analitycznym, jak i predykcyjnym.

## 1.4. Klasyfikacja modeli ekonometrycznych

Konkretny model ekonometryczny może być zapisywany w różnej postaci. Zaliczenie modelu do określonej klasy wywiera wpływ zarówno na wybór metody estymacji, jak i na sposób jego wykorzystania.

Klasyfikacji modeli dokonuje się w oparciu o kilka różnych kryteriów. Pierwsze kryterium: **liczba równań tworzących model ekonometryczny** jest związane z jego definicją według Pawłowskiego ([110], s. 35). Otóż ze względu na liczbę równań różniamy:

- modele jednorównaniowe,
- modele wielorównaniowe.

**Modele jednorównaniowe** opisują zwykle pewien wąski fragment rzeczywistości gospodarczej. W przedsiębiorstwie może to być model produkcji, zwany funkcją produkcji, model popytu na produkowany wyrób, model kształtowania się kosztów, wydajności lub pracochłonności.

Natomiast **modele wielorównaniowe** służą do opisu działania bardziej skomplikowanych organizmów gospodarczych; jako przykład można podać model funkcjonowania przedsiębiorstwa lub całej gospodarki narodowej. Modelom wielorównaniowym poświęcamy odrębny rozdział, w którym omówimy ich dalszy podział.

Drugim kryterium różnicującym modele jest **udział czynnika losowego**. Ze względu na to kryterium modele ekonometryczne dzielimy na:

- deterministyczne,
- stochastyczne.

**Modele deterministyczne** określają w sposób ścisły współzależność między zjawiskami nie dopuszczając żadnych oddziaływań losowych. Wnioskowanie na podstawie