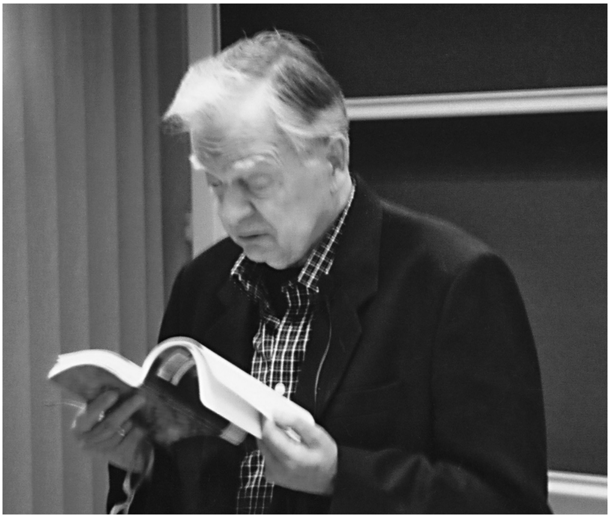
Krzysztof MAURIN

ANALIZA

część I

BM

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN



Profesor Krzysztof Maurin

Krzysztof Maurin (ur. 1923) jest wybitnym polskim uczonym, matematykiem i fizykiem matematycznym, profesorem zwyczajnym na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego (obecnie na emeryturze), specjalistą w zakresie metod przestrzeni Hilberta i teorii reprezentacji grup, autorem wielu prac naukowych, monografii matematycznych oraz trzyczęściowego podręcznika *Analiza*. Bardzo ważnym Jego dziełem jest także stworzenie Katedry Metod Matematycznych Fizyki na Uniwersytecie Warszawskim. Sposób prowadzenia wykładu i traktowania matematyki, różnorodność zainteresowań Profesora, wielki wkład pracy i troska o wykształcenie i wychowanie uczniów zaowocowały powstaniem matematycznej szkoły naukowej i dydaktycznej, znacznie przekraczającej ramy organizacyjne KMMF. Zainteresowania i działalność naukowa Profesora Maurina to nie tylko matematyka i fizyka; od wielu lat prowadzi interdyscyplinarne seminarium, którego tematyka, związana początkowo z metodami i znaczeniem nauk przyrodniczych, z czasem obejmowała szersze obszary, takie jak język, symbol, triada człowiek–świat–Bóg, sztuka, religia. Podobnie ewoluowała tematyka wykładów monograficznych Profesora – od czysto matematycznych do takich, których głównym tematem była filozofia i teologia.

Profesor Krzysztof Maurin jest jedną z najwybitniejszych postaci Uniwersytetu Warszawskiego. Jego działalność naukowa, dydaktyczna i organizacyjna pozostawia trwały ślad w nauce polskiej i dziejach Uniwersytetu Warszawskiego.

Zdjęcie publikujemy dzięki uprzejmości Katedry Metod Matematycznych Fizyki UW

ANALIZA

Krzysztof MAURIN

ANALIZA

część I

Elementy

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 2010

Książka jest reprintem wydania piątego zmienionego z 1991 r.,
które ukazało się nakładem Wydawnictwa Naukowego PWN
jako tom 69 BIBLIOTEKI MATEMATYCZNEJ

Do wydania piątego adaptował
i fragmenty z wydania angielskiego przetłumaczył
TOMASZ SZAPIRO

Projekt okładki i stron tytułowych
MAŁGORZATA PODZIOMEK

Redaktor
JANINA SOLARSKA

ISBN 978-83-01-16229-0 cz. I
ISBN 978-83-01-16232-0 cz. I–III

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
02-676 Warszawa, ul. Postępu 18
tel. 22 69 54 321
faks 22 69 54 031
e-mail: pwn@pwn.com.pl
www.pwn.pl

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Wydanie szóste
Arkuszy drukarskich 23,0
Druk ukończono w lutym 2010 r.
Druk i oprawa: Rzeszowskie Zakłady Graficzne SA
36-062 Zaczernie, Miłocin 181

Moim Uczniom

PRZEDMOWA DO WYDANIA PIERWSZEGO

Każde słowo — podobnie jak imię — niesie w sobie różną treść, budzi różne skojarzenia zależnie od doświadczeń tego, kogo spotyka. I tak, słowo „analiza" znaczy dla każdego matematyka coś innego. Dla jednych obejmuje ono niewiele więcej niż „rachunek różniczkowy i całkowy", dla innych kojarzy się z twierdzeniem Riemanna–Rocha czy formami harmonicznymi.

Pozycja analizy w matematyce jest szczególna: zupełnie inna niż algebry, teorii liczb, teorii mnogości... Nie jest dyscypliną samodzielną: oparta jest na topologii i algebrze. Powstała stosunkowo późno i to „na potrzeby" mechaniki i geometrii. Problemy, które pojawiły się w jej łonie, doprowadziły do powstania tak wielkich i „samodzielnych" dyscyplin, jak teoria mnogości, topologia czy analiza funkcjonalna.

Niesłychanie szybki rozwój matematyki po II wojnie światowej spowodował, że analiza stała się olbrzymim organizmem rozrastającym się na wszystkie strony. Minęły (chyba) bezpowrotnie czasy wielkich francuskich „kursów analizy", które, jak np. klasyczne dzieło Camille'a Jordana, w trzech tomach obejmowały całość ówczesnej wiedzy „analitycznej". Może właśnie dlatego współczesne podręczniki analizy są nieproporcjonalnie skromne w stosunku do obecnego stanu wiedzy. Więcej: „cofnęły się" przed Jordana i Goursata.

Oddana do użytku Czytelnika dwutomowa *Analiza* wyrosła z wykładów „Analizy matematycznej dla fizyków", które prowadzą od 10 lat na Uniwersytecie Warszawskim. Anachroniczna skąpość czasu danego przez fizyków matematykowi (4 godziny tygodniowo przez 4 semestry) oraz chęć pokazania studentom, że analiza jest jednak żywa, zmusiły niżej podpisanego do opracowania wykładów o formie (i treści) nietypowej. Osadem tych doświadczeń był opracowany przeze mnie i mych asystentów, Jerzego Kijowskiego i Wiktora Szczyrbę, czterotomowy skrypt „Wykłady z analizy matematycznej". Wielkie zapotrzebowanie i zainteresowanie, które wzbudziła ta publikacja także poza fizyką i Warszawą, spowodowały, że PWN zwróciło się do mnie z propozycją wydania tego skryptu w formie książkowej. Chętnie przystałem na tę propozycję, „nie wiedząc co czynię"; od książki wymaga się więcej niż od skryptu.

Książka niniejsza obejmuje nie tylko moje wykłady dla fizyków, lecz wykracza bardzo znacznie poza nie. Wyłożenie tego materiału wymagałoby trzech lat wykładów po 4 godziny tygodniowo.

Jest to jedyny podręcznik, który wychodząc od zera – dokładniej mówiąc od liczb wymiernych – dochodzi do teorii dystrybucji, całek prostych, analizy na rozmaitościach zespolonych, przestrzeni Kählera, teorii snopów i wiązek wektorowych itd.

Celem moim było pokazanie młodemu człowiekowi piękna i bogactwa tego niezwykłego świata, jakim jest współczesna analiza matematyczna. Przy kwestiach bardzo zaawansowanych, jak np. twierdzenie o indeksie Atiyaha–Singera, nie mogłem oczywiście podawać pełnych dowodów. Ale wiem, że młody umysł chłonie rzeczy piękne i trudne, ciesząc się, że świat jest wielki i pełen przygód. Wspominam rzewnie, jak w czasie okupacji Edward Marczewski wprowadzał mnie w arkana analizy: w tych czasach ciemności były to dla mnie jasne chwile, za które jestem Mu nieskończenie wdzięczny.

Obok wykładu zakończonych teorii, głównym motywem napisania niniejszej książki było pokazanie horyzontów oraz zachęta do samodzielnego podróżowania po monografiach i pracach specjalnych. W związku z tym podwójnym celem praca niniejsza ma charakter podręcznika-monografii. Przy czym część pierwsza jest podręcznikiem (obejmuje 3 semestry moich wykładów).

Zdaję sobie wyraźnie sprawę z niepełności i braku wykończenia niniejszego przedsięwzięcia. Lecz z jednej strony potrzeby studentów (i monity Wydawnictwa), z drugiej – głębokie spostrzeżenie mego Nauczyciela, Profesora Kuratowskiego: „najtrudniej przestać pisać książkę" (poprawiać i dopisywać do książki z analizy można by bez końca) skłoniły mnie do przekazania maszynopisu Wydawnictwu.

Na zakończenie chciałbym podziękować wszystkim tym, bez których życzliwej pomocy praca ta nie mogłaby powstać; a więc na pierwszym miejscu Jerzemu Kijowskiemu i Wiktorowi Szczyrbie, których opracowanie skryptowe moich wykładów było podwaliną niniejszej książki. Dalej, Stanisławowi Woronowiczowi za napisanie paragrafu o wprowadzeniu koneksji za pomocą miotów, Jackowi Komorowskiemu za paragraf o pochodnej Liego, Wiktorowi Szczyrbie za paragrafy o twierdzeniu Frobeniusa–Dieudonnégo. Trudno chyba o większą satysfakcję dla nauczyciela niż ta, że może się uczyć od swych uczniów.

Książkę tę dedykuję mym słuchaczom: studentom fizyki Uniwersytetu Warszawskiego (pokoleniom dawnym i obecnym); zdawałem sobie zawsze sprawę, że słuchanie moich wykładów było dla wielu z nich męką. Dedykacja ta ma być skromną rekompensatą oraz wyrazem wdzięczności za żywą reakcję, świeżość oraz wyrozumiałość, z jaką przyjmowali moje wysiłki.

Krzysztof Maurin

Moim Uczniom
i Słuchaczom

PRZEDMOWA DO WYDANIA ZMIENIONEGO

Niniejsza książka jest trzecim, a właściwie czwartym wcieleniem mej *Analizy*. Zawdzięcza ona swe powstanie wielu ludziom i okolicznościom. Zewnętrzną formę tego trzyczęściowego wydania (rozdziały I-XIX) doprowadziła do stanu czytelności pracą pełną oddania, cierpliwości i wyrozumiałości dla Jej nauczyciela – redaktor Janina Solarska. Uczeń mój, Dr Tomasz Szapiro, który uczył się z pierwszej wersji (małego skryptu), a przetłumaczył opasłą część II wydania angielskiego, która po znacznym rozszerzeniu (o nowe paragrafy 14-90 rozdziału XII) została podzielona na dwie części: część II (rozdziały XII-XIV) i część III (rozdziały XV-XIX), włożył olbrzymi wysiłek, by mój rękopis stał się podobny do książki. Im dwojgu składam serdeczne, pełne zażenowania wyrazy wdzięczności.

Państwowe Wydawnictwo Naukowe, a w szczególności Redakcje: Matematyki oraz Publikacji Eksportowych są od dziesiątków lat moimi wypróbowanymi współpracownikami!

Krzysztof Maurin

SPIS RZECZY

WSTĘP

Matematyka – Filozofia – Fizyka

Choć początków matematyki należy szukać w Mezopotamii i Egipcie, to dopiero geniuszowi Hellenów zawdzięczamy uświadomienie potrzeby dowodów, aksjomatów, postulatów... Dlatego też ciągle jeszcze *matematyka* kojarzy się nierozerwalnie z Grecją starożytną, Pitagorasem, Euklidesem, Archimedesem, Eudoksosem, Archytasem, Theatetosem.

Imponujące dzieło Euklidesa (ok. 350 p.n.e.) – jeszcze do niedawna w Anglii nazywano matematykę szkolną po prostu „Euklidesem" – powstało z impulsów Akademii Platońskiej. Wiadomo, że w szkole Platona intensywnie uprawiano i pielęgnowano również matematykę. Warto tu podkreślić, że Akademia była rodzajem bractwa religijnego (podobnie jak Pitagorejczycy), wymagającego ascezy, kontemplacji i mającego niewiele wspólnego ze współczesnymi akademiami. Stąd prześladowanie Akademii przez wczesne chrześcijaństwo!

Jak wielką wagę przywiązywał Platon do matematyki, świadczy fakt, że wyjeżdżając w r. 388-387 p.n.e. do południowej Italii, kierownikiem tej szkoły mianował Eudoksosa (408-365 p.n.e) (w tym to czasie 17-letni Arystoteles został przyjęty do Akademii i spędził w niej niemal dwadzieścia lat życia). Eudoksos z Knidos był najwybitniejszym ówczesnym matematykiem (i astronomem), jednym z największych matematyków starożytności. Jemu (obok Theatetosa, 410-368 p.n.e.) zawdzięczamy m.in. słynny *aksjomat Archimedesa*, odkrycie liczb niewymiernych i początek badań nad problemem ciągłości (*continuum*). Jak wstrząsającym i decydującym dla filozofii było to odkrycie, świadczą słowa „późnego" Platona w *Prawach*. Pisze tam Platon, że kontakt z Pitagorejczykami (Archytas, 428-365?, i in.) „... uwolnił mnie od śmiesznego i haniebnego, głęboko w duchu ludzkim zakorzenionego przesądu, że wzajemne długości są współmierne ([1]). Ten stan umysłu wydał mi się niegodny człowieka, a bardziej pasujący do świń – i wstydziłem się za siebie i wszystkich Hellenów".

([1]) Tzn. że istnieją tylko liczby wymierne (*przyp. Autora*).

Ostatni wielki filozof Akademii — Proklos (410-485) był wybitnym matematykiem i jego monumentalny *Komentarz* do pierwszej księgi Euklidesa stanowił nie tylko punkt szczytowy jego filozofii, lecz był głównym impulsem powstania dzieła jednego z największych fizyków wszystkich czasów, Johannesa Keplera (1571-1630). Nawiasem mówiąc, *Komentarz* Proklosa ciągle jeszcze jest może najwybitniejszym dziełem filozofii matematyki i fizyki, którego odpowiednikiem współczesnym jest dzieło największego matematyka naszego wieku, Hermanna Weyla (1880-1955), *Philosophie der Mathematik und der Naturwissenschaften* (1926). (Angielskie tłumaczenie swej książki wzbogacił Weyl wieloma niezwykle cennymi obszernymi przypisami — treści zarówno matematycznej, jak i fizycznej i filozoficznej; oczywiście ostatnie wydanie niemieckie zawiera te angielskie przypisy). Weyl był wybitnym, twórczym fizykiem i interesującym filozofem. Tak więc zarówno dla Greków, jak i dla Keplera, Newtona i Leibniza, a także dla Weyla, matematyka wiąże się nierozerwalnie z filozofią i fizyką. Analiza zawdzięcza swe główne problemy i metody fizyce i fizykom.

Matematyka współczesna jest nauką ezoteryczną: niezrozumiałą, mającą sławę niepojmowalności. Gdy na seminariach czy w artykułach pojawiają się wypowiedzi o współczesnej matematyce, uczestnicy (Czytelnicy) wyłączają się — sprawę zrozumienia oddają walkowerem. Nie trzeba podkreślać, iż w tej sytuacji z matematyką związane są fałszywe przesądy, niechęci, kompleksy; z drugiej zaś strony, matematyka imponuje i niektórzy przedstawiciele nauk niematematycznych próbują „uściślać", „upodabniać" swe prace *more geometrico* podając dziesiątki definicji — jak gdyby matematyka i jej ścisłość polegała na definicjach. Nawiasem mówiąc, definicje matematyczne są zwykle konstrukcjami i dlatego też współczesna matematyka przypomina gigantyczne budowle o pięknej harmonijnej architekturze.

Choć olbrzymi organizm współczesnej matematyki wyrósł z niepozornych kiełków i pędów (mających jednak olbrzymią energię i dynamikę), to warto przypomnieć co u Greków znaczyły takie słowa jak *mathesis*, *mathema*, *theoria*, *theorema*, *physike*, *logos*, *analogia* — bo w tych słowach objawiają się wielkie oczekiwania starożytnych i niespodziewane (dla nas) skojarzenia, jakie Hellenowie z nimi wiązali.

Mathesis pochodzi od czasownika *μανθάνω* (*manthano*), który oznacza:

1) uczyć się, nauczyć, znać, (z)rozumieć, wiedzieć;

2) posiadać znajomość (czegoś, rzeczy), dowiadywać się, otrzymać wiadomość lub informację, słyszeć, postrzegać, zauważać, rozpoznać, rozpoznawać, rozumieć, mieć wgląd, pojmować.

Stąd forma rzeczownikowa słowa (odpowiednik naszej *matematyki*).

Mathema (*μάθημα*): nauczanie, przedmiot nauczania, nauki:

a) nauka (w ogóle!), sztuka, umiejętność, w szczególności *matematyka* (w naszym rozumieniu),

b) materiał nauczania, przedmiot nauczania,

c) nauczanie, doktryna, szkoła ≡ *μαθήσιζ*.

Stąd przymiotnikowo *Mathematikos* (*μάθηματικοζ*):

1) pragnący się uczyć, żądny wiedzy, garnący się do nauki, dający poznanie,

2) matematyczny, dotyczący *matematyki*; rzeczownikowo: matematyk, w szczególności (znający się na gwiazdach) astrolog.

Mathesis (*μάϑησιζ*):

1) uczenie się, wyuczenie się, pojmowanie, poznanie, poznawaniem, przyjmowanie do wiadomości, doświadczenie; ochota do nauki;

2) a) nauka, poznanie, nauczanie, pouczanie, szkoła,

b) *mathema* (*μάϑημα*).

Widać stąd dobitnie, że u starożytnych *matematyka* — to coś zasadniczego, nierozerwalnie związanego i identycznego z poznaniem, poznawaniem, uczeniem się i wiedzą, a nawet tożsamym z nią. Dziś znowu *matematyka* nabiera stopniowo charakteru ogólnego, czegoś decydującego w każdym poznaniu, można by powiedzieć: głównego organu *logosu.*

Logos (*λογοζ*) — od czasów Heraklita — poprzez potężny proces filozoficzny (trwający przynajmniej 6 wieków) zwany *Stoa*, poprzez neoplatonizm i filozofię chrześcijańską — zajmował centralne miejsce w filozofii europejskiej i myśli chrześcijańskiej. W najnowszej filozofii, pod postacią filozofii języka i hermeneutyki (Rosenstock-Huessy, Ebner, Buber, Heidegger, Bollnow, Gadamer, Ernst Fuche i wielu innych), *Logos* odgrywa nie mniejszą rolę. Hinduskim odpowiednikiem *Logosu* jest *Wacz* (mowa — język — słowo). *Logos* — *Wacz* jest wyrazem *Puruszy* — *Pradżapatiego*, człowieka kosmicznego (gnostyckiego Anthroposa), a jednocześnie najwyższego Stwórcy. *Purusza* — *Pradżapati* to imię *Całości*, *Jednego*, *Prajedni*: „On wypowiadał swą *Wacz* (swój *Logos*) i wyłoniły się wszystkie istoty". Gdyby *Pradżapati* nie był na początku i nie wyłonił wszystkiego z *Logosu* (*Logosem*), nie byłoby żadnej możliwości powtórnego zjednoczenia i powrotu rzeczy. *Purusza* jest jednocześnie ofiarą, a ta kosmiczna ofiara jest słowem, *Logosem*, *Wacz*. Ofiara dokonywana przez człowieka, a właściwie przez *Puruszę*, jest możliwa i jest tym, co konstytuuje i jednoczy świat: bez niego (bez niej) nie byłoby *Kosmosu*, byłby *Chaos* pozbawionych związku „rzeczy" ([1]).

Ale powróćmy do słownika! Już w starożytnej Grecji *Logos* (*λογοζ*) miał kilkadziesiąt znaczeń. Ważniejszymi są:

1) *Słowo*, *język*, *mowa*, rozmowa, powiedzenie, wypowiedź, twierdzenie, wyjaśnienie, przysłowie, obietnica, rozkaz, *Prawo*, wykład, *opowiadanie*, baśń (a więc *Logos* nie jest przeciwieństwem *Mythos*, jak się to popularnie uważa!).

Druga ważna grupa znaczeń *Logosu* to:

2) *Liczenie*, obliczenie, zdawanie sprawy, odpowiedzialność, rozważenie, zastanowienie, grunt, cel, rozumna przyczyna, wytłumaczenie, uwzględnienie, *znaczenie*, *waga*, wartość, ranga, *pojęcie*, *istota*, stosunek, proporcja, analogia, rozum (niem. *Vernunft*), zdolność myślenia, siła myśli, wniosek, konkluzja.

Logos i *Physis* (przyroda — natura, to co rośnie, żyje; twórcza siła przyrody) są podstawowymi pojęciami naukowego myślenia Greków i filarami ich filozofii. U Zenona (336-264 p.n.e.) i późniejszych stoików, *Logos* staje się centralnym

([1]) Zainteresowanych odsyłam do epokowego dzieła R. Panikkara *The Vedic experience*, Darion, Longhanrtood, London 1977.

pojęciem filozofii, które usunęło na bok arystotelesowski *Nus*: *Logos* nie tylko poznaje, lecz ma w sobie impuls do działania. Jest on (*Logos*) nie tylko poznającym rozumem, lecz przede wszystkim duchową zasadą, prawem, które rozumnie kształtuje świat, czyniąc go *Kosmosem*. *Logos* u Heraklita i Zenona działa zarówno w *Kosmosie*, jak i w człowieku i dzięki niemu poznanie jest możliwe („*Logos* w człowieku poznaje *Logos* w kosmosie (*Kosmosu*)"). *Logos* jest jednocześnie mową, procesem mówienia, treścią mowy, a ta „miejscem", w którym jawi się Bóg, święta istota świata.

Physike, tzn. fizyka Greków, ma zbadać i pokazać, jak *Logos* jako twórcza zasada kształtuje *Kosmos*. Jak wiemy, *Kosmos* jest dla Posejdoniosa — największego *polihistora* starożytności — żywym organizmem, ożywionym przez siłę *Sympathai* i koordynowanym przez *Logos*. I tak, *Sympathaia* jest prekursorem pojęcia ogólnego ciążenia (grawitacji) i współczesnej *teorii pola*! Pojęciem komplementarnym do *atomów* Demokryta.

Powróćmy znów do słownika. Cóż znaczyły dla całej nauki tak fundamentalne terminy, jak *theoreo*, *theorema*? *Theoreo* (*ϑεωϱέω*) oznacza:

1) mieć ogląd, oglądać, rozważać, zwiedzać, postrzegać, widzieć;

a) musztrować, egzaminować; b) być widzem, przyglądać się, brać udział w święcie, uroczystościach, podróżować, pielgrzymować, by wziąć udział w święcie (w uroczystościach), wysyłać posłów na święto (państwowe);

2) rozważać, przemyśliwać, rozstrząsać, uwzględniać, badać bardzo szczegółowo (zauważać, rozumieć, doświadczać).

Stąd rzeczownikowo *Theorema* (*θεώφημα*):

1) oglądane; w szczególności: a) przedmiot widoczny, b) rzecz godna widzenia, widowisko, c) fakt, prawo doświadczalne, *twierdzenie*, zasada — *reguła* (w sztuce i nauce);

2) naukowe badanie:

Theoros (*θεωϱοζ*) — *widz*: a) w szczególności: delegat państwa (*Polis*) na widowisko, uroczystość; b) posłaniec bogów, pytający w wyroczni, delegat do wyroczni, pielgrzym; c) przenośnie — świadek.

Theoria (*ϑεωϱία*):

1) ogląd, patrzenie, wzięcie na oko, *kontemplacje*, *medytacje*, *wizja* (także lokana); a) radość, przyjemność oglądania, b) partycypacja (widza w przedstawieniach, święcie, uroczystości), odświętna radość, c) widowisko, pokarm dla oczu, d) badanie, naukowe traktowanie sprawy, naukowe poznanie, *teoria* (w szerszym znaczeniu), spekulacja, znajomość rzeczy, *nauka*;

2) odświętne widowisko, *igrzyska*, święto, uroczystość świąteczna; poselstwo na uroczystości świąteczne (państwowe i religijne, bo religia i polityka były jednym!).

Widzimy, że dla Hellenów *Theoria* to kontemplacja i ogląd... We współczesnej matematyce (fizyce) jest podobnie. Teoria jest organicznie powiązanym zespołem pojęć, dowodów, twierdzeń — procesem będącym kontemplacją, dającym ogląd większej całości — partii matematyki. W fizyce, według słynnych słów Einsteina, powiedzianych młodemu Heisenbergowi (1925), gdy ten, w trakcie dokonywania swego fundamentalnego odkrycia teorii kwantów, przyszedł do Einsteina po radę: